

А.Л. Хейфец

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИНЖЕНЕРНОЙ 3D-КОМПЬЮТЕРНОЙ ГРАФИКИ

Платформа nanoCAD



Учебник для геометро-графической подготовки учащихся

нанософт

nanoCAD
ИНЖЕНЕРНАЯ ПЛАТФОРМА

А. Л. Хейфец

Теоретические основы инженерной 3D-компьютерной графики

– Платформа nanoCAD –

Лекционно-практический курс

*Рекомендовано ООО «Нанософт разработка»
в качестве учебника для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по инженерно-техническим
и архитектурно-строительным направлениям
и специальностям*



Москва, 2026

УДК 744:004.92NanoCAD
ББК 30.2с
X35

Рецензенты:

Е. В. Конопацкий, доктор технических наук (05.01.01 «Инженерная геометрия и компьютерная графика»), проректор по научной работе и цифровому развитию, заведующий кафедрой инженерной графики и информационного моделирования Нижегородского государственного архитектурно-строительного университета;

М. Ю. Куприков, доктор технических наук, заведующий кафедрой «Инженерная графика» Московского авиационного института (национального исследовательского университета), профессор.

Хейфец А. Л.

X35 Теоретические основы инженерной 3D-компьютерной графики: учебник для студентов вузов / А. Л. Хейфец. – М.: ДМК Пресс, 2026. – 368 с.: ил. / Платформа nanoCAD.

ISBN 978-5-93700-460-4

Приведено содержание части нового курса, являющегося современной альтернативой традиционному курсу начертательной геометрии, читаемому студентам вузов. Новый курс ориентирован также на изучение современных методов 3D-компьютерного геометрического моделирования. Курс содержит 10 лекций с приложениями.

Темы лекций соответствуют традиционному курсу начертательной геометрии, но каждая тема раскрывается и изложена с позиций 3D-компьютерного моделирования. К каждой лекции создано приложение, в котором приведены дополнительные материалы, содержащие параметры многочисленных 3D-моделей, рассматриваемых на мультимедийных лекциях, алгоритмы построения и решения задач, предназначенных для практических занятий. Для сравнения приведены алгоритмы решения задач методами начертательной геометрии.

В связи с задачами по достижению технологического лидерства курс направлен на освоение активно развивающейся российской Платформы nanoCAD.

Учебник обобщает 40-летний опыт автора преподавания курса начертательной геометрии и нового альтернативного курса студентам ЮУрГУ.

Учебник предназначен для студентов вузов, обучающихся по инженерным и архитектурно-строительным направлениям.

Учебник также предназначен коллегам-преподавателям, осознающим роль современных 3D-методов в геометрическом моделировании и проектировании и необходимость адаптации к ним курса начертательной геометрии.

УДК 744:004.92NanoCAD
ББК 30.2с

Все права защищены. Любая часть этой книги не может быть воспроизведена в какой бы то ни было форме и какими бы то ни было средствами без письменного разрешения владельцев авторских прав.

ISBN 978-5-93700-460-4

© Хейфец А. Л., ООО «Нанософт разработка», 2026
© Оформление, издание, ДМК Пресс, 2026

Содержание

Введение	11
-----------------------	----

Глава 1. Методы 2D- и 3D-геометрического моделирования (лекция 1)	13
--	----

1.1. Содержание, цель и задачи курса.....	13
1.2. Платформа nanoCAD – инструментальное средство курса	15
1.3. Методы геометрического моделирования 2D и 3D	16
1.3.1. Сравнение 2D- и 3D-методов моделирования	16
1.3.2. Чертеж – геометрическая 2D-модель объекта	17
1.3.3. Начертательная геометрия – «грамматика чертежа» [7]	18
1.3.4. Виртуальная реальность как основа компьютерного 3D-моделирования	19
1.4. Назначение чертежа и основы его построения.....	21
1.4.1. Зачем сегодня нужен чертеж.....	21
1.4.2. Требования к чертежу	22
1.4.3. Метод проецирования	22
1.4.4. Проецирование на две плоскости как условие обратимости чертежа	24
1.4.5. Эпюр Монжа	25
1.4.6. Трехпроекционный комплексный чертеж	27
1.4.7. Обозначения объектов и проекций на чертежах. Проекционная связь	28
1.5. Построение 3D-моделей в Платформе nanoCAD.....	29
1.5.1. 3D-модели и режимы их построения	29
1.5.2. Построение точки	30
1.5.3. Модели отрезка и треугольника	30
1.5.4. Твёрдотельные 3D-модели прямого моделирования. Параллелепипед.....	31
1.6. Средства достижения точности компьютерных построений.....	32
1.6.1. Точность вычислений и построений. Задание координат.....	33
1.6.2. Объектная привязка в 2D-построениях. Круги Аполлония	33
1.6.3. Объектная привязка в 3D-построениях	35
1.7. Построение 3D-модели по ее чертежу.....	36
1.7.1. Осный и безосный чертежи.....	36
1.7.2. Алгоритм построения 3D-модели по безосному чертежу	37
1.8. Построение чертежа по 3D-модели.....	38
1.8.1. Методы 2D- и 3D-построения чертежа	38
1.8.2. Автоматизированный вариант построения чертежа	39
1.9. Аксонометрия.....	41
Вопросы для самоконтроля по главе 1	43

Глава 2. Приложение к лекции 1: Методы 2D- и 3D-геометрического моделирования	44
--	----

2.1. Установка программы nanoCAD.....	44
2.2. Создание и сохранение файла	44
2.3. Интерфейс Платформы nanoCAD	45
2.3.1. Элементы интерфейса	45

2.3.2. Настройка строки состояния.....	47
2.3.3. Настройка цветовой гаммы интерфейса	47
2.3.4. Справочная система Платформы nanoCAD.....	47
2.4. Свойства объектов nanoCAD.....	48
2.4.1. Характеристики свойств объектов	48
2.4.2. Задание свойств из Ленты	49
2.4.3. Функциональная панель «Свойства»	49
2.4.4. Управление слоями	49
2.5. Пространство Модели и пространство Листа.....	50
2.6. Система координат в 3D-построениях	50
2.6.1. Мировая, пользовательская и именованная системы координат.....	51
2.6.2. Пиктограммы осей координат – знак ПСК.....	52
2.6.3. Управление отображением пиктограммы ПСК.....	53
2.6.4. Пользовательская системы координат как плоскость 3D-построений	54
2.7. Построение объектов в Платформе nanoCAD	54
2.7.1. Точка.....	54
2.7.2. Отрезок прямой линии. Треугольник. 2D-объекты	55
2.7.3. Параллелепипед как 3D-объект прямого моделирования.....	56
2.8. Управление изображением. Визуальные стили	56
2.8.1. Панорамирование и зуммирование	57
2.8.2. Виды ПСК и виды МСК	57
2.8.3. Орбита.....	59
2.8.4. Визуальный стиль	60
2.9. Оценка точности построений на примере изометрии куба.....	61
2.10. Построения по координатам.....	63
2.10.1. Ввод координат с клавиатуры. Точность задания координат	63
2.10.2. Ввод в декартовой системе координат.....	64
2.10.3. Полярная система координат.....	64
2.10.4. Комбинированный метод	64
2.10.5. Сферические координаты	65
2.10.6. Цилиндрические координаты	66
2.11. Редактирование геометрии объектов.....	66
2.11.1. Команды и средства редактирования	66
2.11.2. Изолирование объектов	68
2.11.3. Копирование через буфер обмена	68
2.12. Режимы построений.....	68
2.13. Объектная привязка и геометрические построения	69
2.13.1. Настройка привязок	70
2.13.2. Отрезок с объектными привязками.....	70
2.13.3. Медианы треугольника	71
2.13.4. Построение кругов Аполлония	71
2.13.5. Пространственная конструкция из отрезков	73
2.13.6. Диагонали наклонного параллелепипеда	74
2.14. Система координат Монжа и система координат nanoCAD	76
2.15. Композиция геометрических примитивов.....	77
2.15.1. Построение объектов композиции	78
2.15.2. Источники света.....	78
2.16. 2D-метод построения чертежа (чертежа композиции).....	80
2.17. Автоматизированное построение проекций. 2D-Виды	81

2.18. Изометрические виды и проекции в nanoCAD	83
2.19. Построение аксонометрической проекции вручную.....	84
2.20. Шаблон	85
2.20.1. Настройка пространства Модели.....	86
2.20.2. Модели координатных плоскостей.....	86
2.20.3. Настройки пространства Листа	88
2.20.4. Формат чертежа для нашего курса	89
2.21. Определение геометрических характеристик моделей.....	90
2.22. Рекомендации по созданию наглядных 3D-моделей.....	91
2.23. Модели к мультимедийной лекции 1	92
2.23.1. К рис. 1.1 «Модель отрезка».....	92
2.23.2. К рис. 1.2 «Модель конуса»	93
2.23.3. К рис. 1.3 «Методы проецирования».....	94
2.23.4. К рис. 1.4 «Обратимость чертежа»	95
2.23.5. К рис. 1.6 «Построение трехпроекционного чертежа точки».....	96
2.23.6. К рис. 2.8 «Модель и чертеж треугольника в системе координат nanoCAD»	98

Глава 3. Взаимное положение точек, прямых и плоскостей (лекция 2)

3.1. Взаимное положение точек относительно координатных плоскостей.....	99
3.2. Взаимное положение точки и прямой линии	101
3.2.1. Определение взаимного положения точки и прямой по 3D-модели.....	101
3.2.2. Определение взаимного положения точки и прямой по чертежу	103
3.3. Прямые общего и частного положения	104
3.3.1. Термины и определения прямых	104
3.3.2. Прямая общего положения	104
3.3.3. 3D-модели прямых уровня	105
3.3.4. Чертежи прямых уровня.....	108
3.3.5. 3D-модели и чертежи проецирующих прямых	109
3.4. Взаимное положение прямых.....	110
3.4.1. Определение взаимного положения прямых по 3D-модели.....	111
3.4.2. Определение взаимного положения прямых по чертежу	113
3.4.3. Взаимное положение скрещивающихся прямых. Метод конкурирующих точек	114
3.5. Принадлежность точки и прямой линии плоскости.....	116
3.5.1. Задание плоскости	116
3.5.2. Определение принадлежности по 3D-модели	116
3.5.3. Определение принадлежности по чертежу. Недостающая проекция точки....	118
3.5.4. Положение плоскости относительно координатных плоскостей проекций....	120
3.6. Параллельность прямой и плоскости, двух плоскостей.....	121
3.6.1. Задачи на параллельность, решаемые по 3D-модели	121
3.6.2. Параллельность плоскостей на чертеже	122
Вопросы для самоконтроля	123

Глава 4. Приложение к лекции 2: Взаимное положение точек, прямых и плоскостей

4.1. Построение 3D-модели точек различного положения относительно прямой	125
4.2. Определение взаимного положения точек по координатам.....	126
4.3. Построение чертежа точек и отрезка прямой.....	127

4.4. Построение 3D-моделей и чертежей прямых частного положения	128
4.4.1. 3D-модели прямых уровня	128
4.4.2. Последовательность построения чертежа прямых уровня.....	129
4.4.3. Построение проецирующих прямых	130
4.5. 3D-модель прямых различного взаимного положения	131
4.5.1. Построение 3D-модели по координатам точек	131
4.5.2. Построение 3D-модели, заданной на чертеже	133
4.6. Алгоритмы оценки взаимного положения прямых по 3D-модели	134
4.7. Применение кажущегося пересечения для скрещивающихся прямых.....	135
4.8. Построение 3D-моделей плоскостей.....	136
4.8.1. Модель к рис. 3.14 «3D-модели и чертежи плоскости».....	136
4.8.2. Модели к рис. 3.16 «Пространственное положение плоскостей»	137
4.8.3. Модель к рис. 3.17 «Пример параллельных плоскостей»	138

Глава 5. Проецирование. Пересечение. Перпендикулярность (лекция 3) 139

5.1. Ортогональное и косоугольное проецирование точки и прямой на плоскость ...	139
5.2. Ортогональное проецирование в nanoCAD	141
5.2.1. Применение функциональной панели «Свойства»	141
5.2.2. Конвертирование в 2D	142
5.2.3. Координатные фильтры	142
5.2.4. Автоматизированный чертеж 3D-модели, состоящей из точек, отрезков, и пространственных линий.....	143
5.3. Пересечение прямой линии с плоскостью. Алгоритм 3D.....	144
5.4. Косоугольное проецирование. Алгоритмы 3D	146
5.4.1. Построение недостающей проекции точки	146
5.4.2. Проецирование плоской фигуры на плоскость	147
5.4.3. Построение падающей тени от призмы.....	147
5.5. Построение точки пересечения прямой с плоскостью. Алгоритм НГ	149
5.6. Главные прямые плоскости. Алгоритмы 3D.....	150
5.6.1. Свойства главных прямых	150
5.6.2. Алгоритм 1. На основе пересечения прямой линии с плоскостью	151
5.6.3. Алгоритм 2. На основе пересечения двух плоскостей.....	152
5.7. Построение линии пересечения плоскостей. Алгоритмы 3D	152
5.7.1. Алгоритм 1. На основе пересечения прямых с плоскостями	153
5.7.2. Алгоритм 2. На основе вспомогательной поверхности	153
5.7.3. Алгоритм 3. Преобразование в солиды	154
5.7.4. Проверка правильности построения линии пересечения.	154
5.8. Построение взаимно перпендикулярных объектов. Алгоритмы 3D.....	155
5.8.1. Перпендикуляр к прямой линии	155
5.8.2. Перпендикуляр к плоскости. Алгоритм 3D	156
5.8.3. Плоскость, перпендикулярная прямой, и касательная плоскость	158
5.8.4. Взаимно перпендикулярные плоскости	159
5.9. Теорема о проецировании прямого угла	161
Вопросы для самоконтроля к лекции 3	162

Глава 6. Приложение к лекции 3: Проецирование. Пересечение.

Перпендикулярность	164
6.1. 3D-модели проецирования точки и отрезка.....	164

6.1.1. Модель к рис. 5.1а «Ортогональное и косоугольное проецирование»	164
6.1.2. Модель к рис. 5.2 «Ортогональное проецирование»	165
6.1.3. Применение координатных фильтров	166
6.2. Алгоритм автоматизированного построения чертежа точек и отрезков.....	167
6.2.1. Общий алгоритм	167
6.2.2. Чертеж модели к рис. 5.2 и 5.3 (раздел 5.2) «Ортогональное проецирование». Удаление повторяющихся линий	168
6.2.3. Модель и чертеж к рис. 5.4 «3D-модель пересечения отрезка с плоскостью» ...	170
6.3. Модели косоугольного проецирования	170
6.3.1. Модель к рис. 5.5а «Построение точки в плоскости по фронтальной проекции этой точки»	171
6.3.2. Модель к рис. 5.5б «Построение треугольника в заданной плоскости по его горизонтальной проекции».....	171
6.3.3. Тень от призмы	171
6.4. Модель и алгоритм НГ построения точки пересечения прямой с плоскостью.....	174
6.4.1. Решение для горизонтально проецирующей плоскости. Метод конкурирующих точек	175
6.4.2. Решение для фронтально проецирующей плоскости	176
6.5. Главные прямые плоскости. 3D-модель и алгоритм НГ.....	178
6.5.1. 3D-модели главных прямых	178
6.5.2. Алгоритм начертательной геометрии построения главных прямых.....	180
6.6. Модели и 3D-алгоритмы пересечения плоскостей.....	181
6.6.1. Модели к рис. 5.9 «3D-алгоритмы построения линии пересечения двух плоскостей»	181
6.6.2. Модель к рис. 5.10 «Пересечение треугольников»	182
6.6.3. Построение линии пересечения плоскостей методами начертательной геометрии	183
6.7. Построение плоского пятиугольника	186
6.7.1. Построение 3D-модели	186
6.7.2. Наглядность 3D-модели и ее проверка	187
6.7.3. Алгоритм построения пятиугольника методами начертательной геометрии	187
6.8. Модели и алгоритмы построения перпендикулярных объектов.....	188
6.8.1. Перпендикуляр из точки к прямой линии	188
6.8.2. Построение ромба. Алгоритм 3D.....	188
6.8.3. Построение ромба. Алгоритм начертательной геометрии	189
6.8.4. 3D-модель перпендикуляра к плоскости	190
6.8.5. Построение перпендикуляра к плоскости. Алгоритм начертательной геометрии	191
6.8.6. Плоскость, касательная к сфере. Алгоритм 3D	192
6.8.7. Плоскость, равноудаленная от двух заданных точек. Алгоритм 3D	193
6.8.8. 3D-модель пирамиды	193
6.8.9. Построение плоскости, перпендикулярной прямой. Алгоритм НГ	195
6.8.10. Модели взаимно перпендикулярных плоскостей. Алгоритмы 3D и начертательной геометрии.....	196
6.8.11. Модель к теореме о проецировании прямого угла	200

Глава 7. Метрические задачи (лекция 4).....

202

7.1. Метрические задачи в Платформе nanoCAD. Алгоритмы 3D	202
---	-----

7.1.1. Измерение расстояний	202
7.1.2. Измерения углов	203
7.1.3. Угол и расстояние между скрещивающимися прямыми	205
7.1.4. Кратчайшее расстояние между поверхностями	207
7.2. Метрические задачи в начертательной геометрии	209
7.2.1. Проецирование на дополнительную плоскость	209
7.2.2. Преобразование прямой общего положения в прямую уровня	210
7.2.3. Способ прямоугольного треугольника	211
7.2.4. Преобразование прямой уровня в проецирующую прямую	212
7.2.5. Преобразование плоскости в проецирующую плоскость и плоскость уровня	213
7.2.6. Алгоритм проецирования на дополнительную плоскость	215
Вопросы для самоконтроля	215

Глава 8. Приложение к лекции 4: Метрические задачи

8.1. 3D-модели метрических задач	217
8.1.1. Измерение двугранного угла (к рис. 7.1а, б)	217
8.1.2. Угол между перпендикулярами плоскостей (к рис. 7.1в)	218
8.1.3. Углы с координатными плоскостями (к рис. 7.1г)	219
8.1.4. Угол и расстояние между скрещивающимися прямыми (к рис. 7.2)	219
8.1.5. Углы и расстояние между диагоналями координатных плоскостей	220
8.1.6. Расстояние между поверхностями конуса и сферы (к рис. 7.3)	220
8.1.7. Расстояние от тора до цилиндра (к рис. 7.4)	222
8.1.8. Преобразование прямой общего положения в прямую уровня (к рис. 7.5) ...	223
8.1.9. Преобразование прямой уровня в проецирующую прямую (к рис. 7.7)	224
8.1.10. Преобразование плоскости общего положения в плоскость уровня (к рис. 7.8)	225
8.2. Автоматическое построение чертежа в метрических задачах. Алгоритм начертательной геометрии	226
8.2.1. Чертеж к преобразованию прямой общего положения в проецирующую прямую	226
8.2.2. Чертеж к преобразованию плоскости общего положения в плоскость уровня (к рис. 7.8)	229
8.2.3. Чертеж к задаче определения расстояния и угла между скрещивающимися прямыми	231

Глава 9. Комплексные задачи (лекция 5)

9.1. Об истории и роли комплексных задач	234
9.2. Примеры геометрических множеств	235
9.3. Схема решения комплексных задач	237
9.4. Комплексные задачи на построение точек	238
9.4.1. Точка с заданной проекцией, равноудаленная от двух других точек	238
9.4.2. Точка, равноудаленная от трех точек и на заданном расстоянии от четвертой точки	239
9.4.3. Точка, равноудаленная от двух точек, на заданных расстояниях от третьей точки и от плоскости	240
9.4.4. Точка на заданном расстоянии от трех скрещивающихся прямых	243
9.5. Комплексные задачи как пример исследовательской работы студентов	244
9.5.1. Точки, равноудаленные от трех скрещивающихся прямых	245

9.5.2. Исследование количества решений.....	246
9.6. Комплексные задачи на построение прямых	248
9.6.1. Прямая через заданную точку, параллельная двум плоскостям.....	248
9.6.2. Прямая через заданную точку, пересекающая две скрещивающиеся прямые.....	251
9.6.3. Прямая через заданную точку, перпендикулярная двум скрещивающимся прямым.....	252
9.6.4. Прямая через заданную точку, на заданном расстоянии от другой и пересекающая заданную прямую	253
9.6.5. Прямая через заданную точку, под углом к заданной прямой и на заданном расстоянии от другой точки.....	255
9.7. Комплексные задачи на построение плоскостей	256
9.7.1. Плоскость, удаленная на заданные расстояния от трех заданных точек.....	256
9.7.2. Плоскость, перпендикулярная заданной плоскости, равнонаклоненная к Π_1 и Π_2 и проходящая через заданную точку	260
9.7.3. Плоскость, проходящая через заданную точку и составляющая с Π_1 и Π_2 заданные углы	263
Вопросы для самоконтроля	265
Глава 10. Приложение к лекции 5: Комплексные задачи.....	266
10.1. Материалы к разделу 9.4.1	266
10.2. Материалы к разделу 9.4.2	268
10.3. Материалы к разделу 9.4.3	270
10.4. Материалы к разделу 9.4.4	275
10.5. Материалы к разделу 9.5.1	278
10.6. Материалы к разделу 9.5.2	279
10.7. Материалы к разделу 9.6.1	280
10.8. Материалы к разделу 9.6.2	282
10.9. Материалы к разделу 9.6.3	284
10.10. Материалы к разделу 9.6.4	286
10.11. Материалы к разделу 9.6.5	289
10.12. Материалы к разделу 9.7.1	292
10.13. Материалы к разделу 9.7.2	297
10.14. Материалы к разделу 9.7.3	299
Глава 11. Геометрические тела (лекция 6).....	304
11.1. Типы 3D-геометрических объектов.....	304
11.2. Многогранники.....	305
11.2.1. Тела Платона	305
11.2.2. Пирамида.....	307
11.2.3. Пересечение многогранника с прямой линией	309
11.2.4. Сечение многогранника (пирамиды) плоскостью	310
11.2.5. Призма.....	311
11.3. Конус	312
11.4. Цилиндр	314
11.5. Сфера.....	316
11.5.1. Свойства сферы и основные определения	316
11.5.2. 3D-модель сферы.....	317
11.5.3. Чертеж сферы.....	318

11.6. Конические сечения – коники.....	318
11.7. Тор.....	320
11.8. Сечения тора.....	321
Вопросы для самоконтроля	323
Глава 12. Приложение к лекции 6: Геометрические тела	325
12.1. 3D-модели тел Платона	325
12.1.1. Додекаэдр	325
12.1.2. Икосаэдр	327
12.1.3. Модель «Икосаэдр вписан в додекаэдр».....	329
12.2. Алгоритмы 3D- и 2D-построений пирамиды и призмы	330
12.2.1. 3D-модель пирамиды к рис. 11.4а	330
12.2.2. Чертеж многогранника (пирамиды) к рис. 11.4б	332
12.2.3. Модель и чертеж к рис. 11.5 (пересечение прямой с пирамидой).....	332
12.2.4. 3D-модель и чертеж сечения пирамиды плоскостью (к рис. 11.6)	333
12.2.5. 3D-модель и чертеж призмы (к рис. 11.7).....	336
12.2.6. Параллелепипед по трем скрещивающимся прямым.....	337
12.3. 3D-модель и чертеж конуса.....	341
12.3.1. Модель конической и цилиндрической поверхностей (к рис. 11.8)	341
12.3.2. 3D-модель пересечения конуса с прямой линией (к рис. 11.9а)	342
12.3.3. Чертеж кругового конуса.....	343
12.4. 3D-модель цилиндра (см. рис. 11.10а)	344
12.5. 3D-модель и чертеж сферы (см. рис. 11.11)	345
12.6. Построение сферы, заданной четырьмя точками	347
12.7. 3D-модели коник.....	351
12.7.1. Методика построения коник	351
12.7.2. Эллипс.....	351
12.7.3. Парабола	353
12.7.4. Гипербола	353
12.8. Шары Данделена	354
12.8.1. Теорема Данделена.....	354
12.8.2. Построение 3D-модели теоремы Данделена	356
12.9. «Мистический шестиугольник» Паскаля	359
12.10. 3D-модели и чертеж тора	361
12.11. 3D-модели сечений тора	364
Библиографический список.....	366
Заключение	367

Введение

В учебнике приведено содержание нового лекционно-практического курса, альтернативного традиционному курсу начертательной геометрии, читаемому в вузах студентам инженерных и архитектурно-строительных специальностей и направлений.

Начертательная геометрия (НГ) изучает пространственные свойства объектов на основе отображений объектов на плоскость. НГ является теоретической основой построения чертежа. Преподавание НГ ведут кафедры графики на основе исторически сложившихся методик (в текущем году исполнилось 226 лет со дня начала НГ как самостоятельной учебной дисциплины). Карандаш, циркуль и линейка – вот инструментарий и основанные на нем методики курса, как его сегодня преподают в подавляющем большинстве вузов.

В настоящее время методы НГ практически не применяются при проектировании, а разработки ведутся в формате 3D, в компьютерном варианте его реализации. Сегодня НГ осталась только в учебном процессе кафедр графики.

3D-компьютерное моделирование – это создание реалистичных, объемных, виртуальных моделей. По этим признакам 3D-моделирование принципиально отличается от исторически традиционных 2D-методов проектирования на плоскости путем создания проекций объектов в виде чертежей. В инженерной практике 3D-модели – это узлы и детали машин, здания и сооружения в строительстве.

Подобно тому как НГ считается теоретической основой построения чертежа, новый курс создан как теоретическая основа 3D-моделирования, в котором объектами изучения являются действия над точками, прямыми и поверхностями на основе построения 3D-моделей и операций с ними.

Новый курс содержит 10 лекций и приложений к каждой лекции. В этом издании приведена первая часть курса, содержащая 6 лекций с приложениями. Предусмотрен мультимедийный формат ведения лекции. На лекциях рассматриваются реалистичные 3D-модели, по которым выполняются исследования пространственных свойств объектов. Приложения содержат дополнительные материалы к лекциям, алгоритмы построения моделей и примеры решения задач к практическим занятиям. Для сравнения приводятся решения задач методами НГ.

Темы лекций нового курса повторяют темы курса НГ, но излагаются не на основе построения проекций и их преобразований, а с позиций 3D-компьютерного моделирования, построения реалистичных виртуальных наглядных 3D-моделей.

НГ является одной из самых сложных учебных дисциплин. 3D-методы позволяют сделать содержание курса актуальным, доступным, поднять интеллектуальный уровень решаемых задач, учесть интерес молодежи к компьютерным методам.

Материал каждой лекции представлен в двух главах.

В главах 1, 2 рассмотрены термины и основы 2D- и 3D-геометрического моделирования. Приведены простейшие примеры построения 3D-моделей. Приведена характеристика Платформы nanoCAD как инструментального средства нашего курса.

В главах 3, 4 приведены операции по определению взаимного положения точек, прямых линий и плоскостей как простейших абстрактных объектов, важных для теоретического курса. На этих действиях основана и осваивается техника геометрического моделирования.

В главах 5, 6 рассмотрены операции автоматического проецирования точек и прямых линий на плоскость, автоматического построения чертежа этих объектов, построения точек пересечения, а также построение взаимно перпендикулярных прямых и плоскостей.

В главах 7, 8 приведены методы определения геометрических параметров объектов и моделей – размеров, расстояний, длин, углов, площадей, объемов и т. д., а также метрические задачи, основанные на этих методах. Основное внимание уделено 3D-методам решения в Платформе nanoCAD, но кратко рассмотрены и методы НГ. В главах 9, 10 рассмотрены комплексные задачи, которые обобщают материал, пройденный в предыдущих лекциях. Показана история комплексных задач и их роль в нашем курсе. Показана эффективность 3D-методов решения, позволяющая «поднять планку» в уровне сложности задач и повысить интеллектуальный уровень студентов. Для сравнения приведены решения комплексных задач методами НГ.

В главах 11, 12 приведены задачи на построение 3D-моделей геометрических тел, построение точек на поверхности тел и точек пересечения тел с прямыми линиями и плоскостями. Рассмотрено построение красивейших тел Платона – додекаэдра и икосаэдра – и не менее красивых пирамиды, призмы, цилиндра, сферы. Особое внимание уделено коническим сечениям, для которых приведены исторические теоремы Паскаля и Данделена. Подробно рассмотрены тор и его исторические сечения: кривые Персея и круги Вилларсо.

Материалы лекций поясняются многочисленными рисунками, при выполнении которых учитывалась не только их геометрическое содержание, но уделялось значительное внимание красоте 3D-моделей, построенных в Платформе nanoCAD. Красота моделей, как и компьютерная виртуальность моделей, призвана способствовать привлечению внимания студентов к учебному курсу.

Начиная с 1991 г., когда в России появились программные продукты 3D-компьютерной графики, автор развивает это направление и внедряет его в курсы подготовки студентов инженерных и строительных специальностей, а также архитекторов [1, 2, 3].

С 2021 года автор преподает графические дисциплины на базе Платформы nanoCAD. В 2024 году при финансовой и организационной поддержке компании «Нанософт разработка» автором издан учебник «Инженерная 3D-компьютерная графика. Платформа nanoCAD» [4]. Настоящий учебник также издается при поддержке компании «Нанософт разработка».

ГЛАВА 1

Методы 2D- и 3D-геометрического моделирования (лекция 1)

Первая лекция вводит студентов в изучаемый курс. Рассмотрены термины и основы 2D- и 3D-геометрического моделирования и проектирования, дано их сравнение и обозначена взаимосвязь. Нужен ли сегодня чертеж и каковы современные методы его построения? Что такое начертательная геометрия? Представлены простейшие примеры построения 3D-моделей. Приведена характеристика Платформы nanoCAD как инструментального средства нашего курса.

1.1. Содержание, цель и задачи курса

Название курса: «Теоретические основы инженерной 3D-компьютерной графики». Курс представляет собой современную альтернативу традиционному курсу «Начертательная геометрия» и ориентирован на студентов всех инженерных специальностей.

Расшифруем название курса. Это требует знакомства с рядом определений.

Инженерная компьютерная графика – учебная дисциплина, которая изучает построение геометрических моделей, в том числе чертежей, инженерной сферы деятельности (т. е. машин и механизмов, их деталей, зданий и сооружений и др.) с использованием компьютерных технологий, заключающихся в применении компьютеров и графических программ в качестве инструмента.

Теоретическая основа курса – это раздел курса, в котором объектами изучения являются точки, прямые, плоскости, особенности их взаимного положения. Также объектами изучения являются базовые геометрические фигуры (их еще называют «геометрическими примитивами»: призма, конус, сфера и др.), построение и свойства сложных «классических» поверхностей (параболоид, гиперболоид, торс и др.). Из этих абстрактных моделей состоят модели реальных объектов. Знание теоретических основ позволит в следующих семестрах уверенно перейти к практической части курса, где моделями являются детали машин и строительные сооружения.

Модель – представление данных об объекте, показывающее его свойства, существенные для изучения объекта. В процессе изучения модель заменяет реальный объект. Возможны математические, геометрические, многочисленные физические модели одного и того же объекта. Например, $x^2 + y^2 = R^2$ – математическая модель окружности, в ней модель представлена математическими символами и их взаимосвязями. Начерченная циркулем окружность – ее геометрическая модель.

Геометрическая модель воспроизводит объект посредством геометрических примитивов и их взаимосвязей (пересечение, параллельность, форма и взаимное положение поверхностей и др.). Например, тонкий цилиндр – геометрическая модель карандаша, отображает его форму, длину, диаметр и пространственное положение. Отрезок прямой линии также может быть моделью карандаша, если его размеры малы по сравнению с размерами других элементов. То есть объект в зависимости от решаемой задачи может иметь множество моделей, в том числе и геометрических. Важное преимущество геометрических моделей перед математическими заключается в их наглядности.

Что означает «3D» в названии нашего курса? Различают 2D- и 3D-геометрические модели (*D* – Dimension: измерение, размерность). *2D-модели* – это чертежи, построенные в виде проекций на плоскости (см. ниже, раздел 1.3.1). В нашем курсе мы изучаем 2D-моделирование как частный случай геометрического моделирования. *3D-модели* – это объемные модели. Они могут быть физическими (макеты из глины, дерева, металла...). Сегодня в инженерном проектировании 3D-модели первоначально создают на компьютере и только после этого переходят к созданию реальных моделей, комплекта документации (в том числе чертежей) и созданию реальных объектов. В нашем курсе мы будем строить компьютерные 3D-модели и по ним изучать свойства реальных объектов.

Важно также разобраться в следующих двух определениях.

Пространственное мышление – это способность умственной деятельности видеть и представлять мир трехмерным, объемным, создавать пространственные образы, мыслить в терминах изображений и использовать их для решения практических и творческих задач.

Логическое мышление – это мыслительный процесс, которому свойственна доказательность, рассудительность и целью которого является получение обоснованного вывода из имеющихся предпосылок.

На основе приведенных определений сформулируем цель и задачи нашего курса.

Цель курса: изучение теоретических основ 3D-компьютерного геометрического моделирования применительно к задачам инженерной сферы деятельности.

Задачи учебного курса:

- 1) изучение и исследование геометрических свойств объектов методами компьютерного 3D-моделирования;
- 2) развитие пространственного и логического мышления;
- 3) освоение современных методов геометрического моделирования на базе Платформы nanoCAD;

- 4) изучение методов начертательной геометрии (НГ) в объеме, необходимом для чтения и построения чертежей.

Содержание и структура курса: 10 мультимедийных лекций, 16–18 практических занятий в компьютерном классе, решение задач методами компьютерного 3D-моделирования, контрольные работы и контрольно-графические задания. Завершается курс экзаменом.

Контрольно-графические задания (КГЗ)

КГЗ – это самостоятельная работа студента, подводящая итог отдельным разделам курса. Оценки по КГЗ составляют основу общей экзаменационной оценки. Предусмотрены три КГЗ:

- 1) КГЗ_1. Решение комплексных задач;
- 2) КГЗ_2. Исследование линии пересечения поверхностей второго порядка;
- 3) КГЗ_3. Расчет продолжительности инсоляции.

Рекомендуемая учебная литература [4, 5, 6] приведена в разделе «Библиографический список».

1.2. Платформа nanoCAD – инструментальное средство курса

Компьютерное моделирование предполагает применение графических программ. В течение 25–30 лет автор развивал и преподавал излагаемый курс в различных программах САПР. Начиная с 2022 г., в связи с требованиями импортозамещения, инструментальным средством курса является российская Платформа nanoCAD – продукт компании «Нанософт».

Расшифруем обозначение программы. «CAD» (Computer Aided Design) – «компьютерная поддержка проектирования». Эту часть обозначения в русской транскрипции расшифровывают как САПР – «система автоматизированного проектирования или система автоматизации проектных работ». Приставка «nano» (единица измерения, равная 10^{-9}) символизирует высокую точность построений. Из физики известно, что на этом уровне размеров проявляются качественно новые свойства материалов. Таким образом, nanoCAD – система автоматизированного проектирования высокой точности и нового качественного уровня проектирования.

Широта возможностей nanoCAD позволяет применять его как инструментальную базу при обучении широкому спектру учебных дисциплин. Мы будем использовать nanoCAD в нашем курсе теоретических основ геометрического моделирования. В следующем семестре – применять в курсе инженерной и компьютерной графики. На старших курсах студенты архитектурно-строительных специальностей будут изучать решение задач архитектурного и строительного проектирования на основе многочисленных модулей и вертикальных приложений Платформы nanoCAD. Примеры приложений: «СПДС» – строительные чертежи; BIM – 3D-модели зданий, системы отопления, электрооборудования, охранно-пожарная сигнализация; GeoniCS – землеустройство. Машинострои-

тели могут применять nanoCAD для проектирования деталей, машин, механизмов. Приборостроители – для разработки электросхем и т. д. Все приложения являются надстройками (дополнениями) к Платформе nanoCAD. Для нашего курса достаточно одной Платформы.

Платформа nanoCAD – сравнительно молодой и развивающийся программный продукт. Первая его версия выпущена компанией «Нанософт» в 2008 г. Версии ежегодно обновляются. Материал нашего учебника адаптирован к версиям 24.1 и 25.0, выпущенным в 2024–2025 гг.

О том, как установить Платформу nanoCAD на домашний компьютер и начать в ней работать, сказано в главе 2. Там же приведены сведения об интерфейсе и командах программы, алгоритмы решения задач и построения моделей. К разделам этой главы необходимо самостоятельно обращаться при решении задач нашего курса.

- Лектору: покажите содержание главы 2 как справочного материала. Остановитесь на разделах 2.1–2.3, посвященных установке и интерфейсу Платформы nanoCAD. Откройте nanoCAD и покажите элементы интерфейса на экране.

1.3. Методы геометрического моделирования 2D и 3D

Моделирование – метод исследования объектов или процессов реального мира на основе их моделей. *Геометрическое моделирование* – исследование пространственных свойств объектов на основе геометрических моделей (см. выше: *геометрические модели*, раздел 1.1).

1.3.1. Сравнение 2D- и 3D-методов моделирования

В зависимости от применяемых моделей различают двумерные (2D) и трехмерные (3D) методы геометрического моделирования. Рассмотрим и сравним эти методы на примере моделей отрезка прямой линии. (Построение моделей – см. раздел 2.7.)

3D-модель отрезка (рис. 1.1а, б) прямой линии построена в Платформе nanoCAD. Это модель пространственная и наглядная, поэтому легко воспринимается зрением и сознанием человека. Средства nanoCAD позволяют осмотреть модель с разных сторон, выполнить измерения: определить координаты концов отрезка, углы отрезка с плоскостями координат.

2D-модель отрезка (рис. 1.1в) – это его чертеж, выполненный на плоскости, например на листе бумаги в клеточку. Чертеж не обладает наглядностью 3D-модели. Чтобы понять по нему пространственное положение и параметры отрезка, требуется специальная подготовка. При вращении 2D-модели видно, что это плоское изображение (рис. 1.1г), которое может быть вырождено в прямую линию.

Построение модели к рис. 1.1 приведено в разделе 2.23.1.

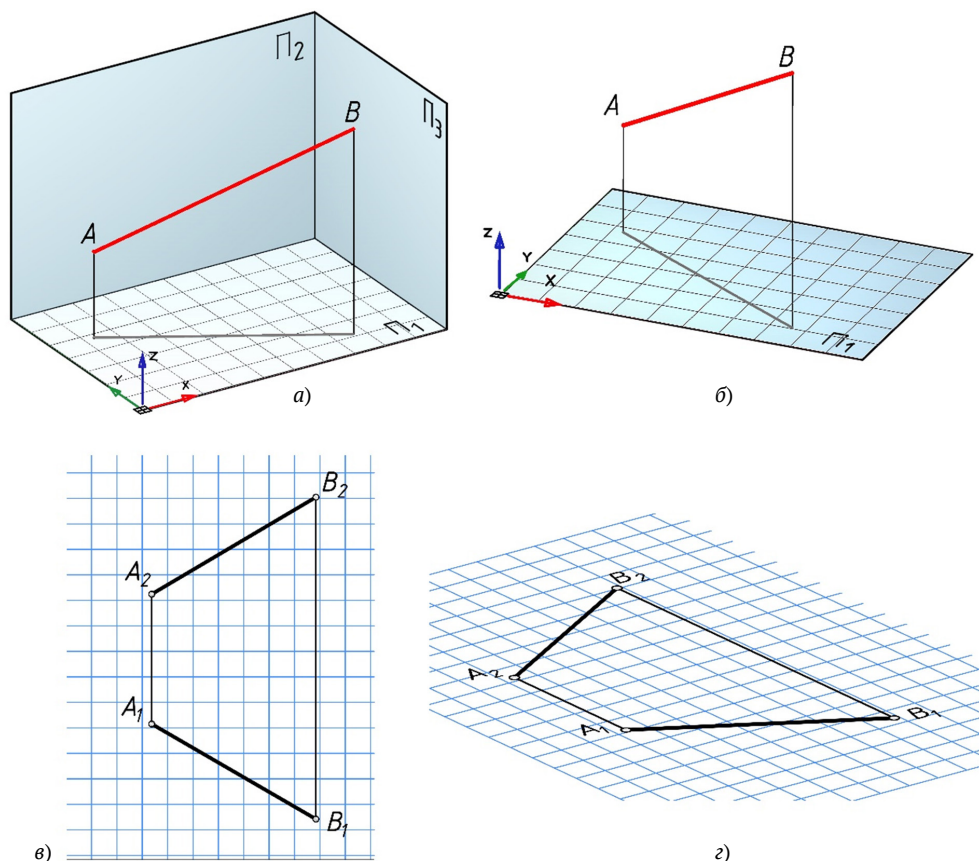


Рис. 1.1. Модель отрезка:

а, б – 3D-модель при различном направлении взгляда;
 в – 2D-модель (чертеж), взгляд перпендикулярно плоскости чертежа;
 г – взгляд под непрямым углом к плоскости

○ Лектору:

- откройте файл «Сравнение 2D-3D отрезок .dwg» (см. раздел 2.23.1);
- вращайте 3D-модель отрезка, демонстрируя виртуальную реальность моделей;
- покажите чертеж отрезка, вращайте и покажите, что чертеж является плоским и не обладает наглядностью;
- по 3D-модели определите метрические характеристики отрезка, например, командой «Список» или через окно «Свойства»: длину отрезка, координаты его конечных точек, углы наклона.

1.3.2. Чертеж – геометрическая 2D-модель объекта

2D-модели – это чертежи на плоскости, на листе бумаги, где каждая точка в плоскости чертежа имеет две координаты (отсюда и название «2D»). Мы живем в трехмерном мире и нам естественно 3D-моделирование. Но до появления компьютеров построение 3D-моделей объектов было или более сложным, чем создание чертежей, или вообще невозможным. Поэтому 2D-построения

в виде чертежей преобладали над 3D-моделями, и до появления компьютерных 3D-программ являлись основным методом проектирования.

При использовании 2D-технологии проектирования конструктор создает чертеж, содержащий плоские изображения объекта: его виды, разрезы и сечения. Объемная модель проектируемого изделия формируется мысленно, в голове конструктора. Этот метод является традиционным, используется уже веками, оставаясь распространенным и по сей день.

Основные инструменты такой технологии – лист бумаги, карандаш, линейка и циркуль. Существуют и компьютерные версии 2D-проектирования, где компьютер служит лишь инструментом автоматизации рутинной графической работы: проведения линий нужной толщины, оформления надписей заданным шрифтом, прорисовки стрелок требуемой формы и т. д., но не более.

1.3.3. Начертательная геометрия – «грамматика чертежа» [7]

Теоретической основой 2D-построений является начертательная геометрия.

Начертательная геометрия (НГ) – наука и учебная дисциплина, изучающая пространственные свойства объектов на основе отображений объектов на плоскость чертежа (проекций). НГ является теоретической основой построения чертежа, содержащей закономерности и принципы его построения.

Различают прямую и обратную задачи НГ. Прямая задача – построить чертеж объекта, отвечающий предъявляемым к нему требованиям (о требованиях к чертежу – см. ниже, раздел 1.4.2). Обратная задача – по чертежу воспроизвести 3D-модель объекта, позволяющую построить этот объект.

Основателем НГ является *Гаспар Монж* (1746–1818) – французский математик, геометр, государственный деятель. Его трактат «Начертательная геометрия» [6], который вышел в свет в 1799 г., считается началом этой науки и учебной дисциплины.

Возникла НГ как следствие сложности 3D-моделирования. Приведем две цитаты из юбилейного сборника¹, посвященного Г. Монжу:

«Анализируя решения стереометрических задач посредством геометрических построений, он [Г. Монж] убедился, что такое решение является только умозрительным, но что конкретно посредством чертежных инструментов оно невыполнимо. Его можно бы выполнить пластически в пространстве трех измерений, если бы имели возможность совершать в этом пространстве такие “чертежные” манипуляции, как построение линий, плоскостей и вообще любых поверхностей. Но, как известно, это невозможно. Мало того, мы не можем даже фиксировать точку в пространстве».

«...Гаспар Монж свел невозможные <...> построения в пространстве трех измерений к действиям над двумя ортогональными проекциями какого-либо тела...»

¹ Каргин Д. И. Гаспар Монж – творец начертательной геометрии / Гаспар Монж: сборник статей к двухсотлетию со дня рождения. – Изд-во АН СССР, 1947. – С. 17–44.

Подчеркнем, что это академическая формулировка корней начертательной геометрии, – в прошлом строить чертеж, работая непосредственно в 3D-пространстве, было практически невозможно. Невозможно было и при Г. Монже, и в год его юбилея (1947 г.). Но ведь сейчас инструмент для таких действий общедоступен – это компьютер с современной графической программой – например, Платформой napoCAD. Так нужен ли чертеж в наше время? Этот вопрос рассмотрим ниже (см. раздел 1.4.1).

1.3.4. Виртуальная реальность как основа компьютерного 3D-моделирования

Если построения происходят в объеме (например, создается модель из глины, дерева), то это 3D-построения и моделирование, так как каждая точка модели строится по трем координатам. Современное компьютерное 3D-моделирование реализует принцип виртуальной реальности (VR). Приведем два определения из интернета.

Виртуальная реальность – это компьютерная технология, «создающая имитацию трехмерного мира, которым пользователь может управлять и исследовать, чувствуя себя как в настоящей реальности».

«Виртуальная реальность (VR) – это генерируемая с помощью компьютера трехмерная среда, с которой пользователь может взаимодействовать, полностью или частично в нее погружаясь. Свойства VR. Правдоподобная – поддерживает у пользователя ощущение реальности происходящего. Интерактивная – обеспечивает взаимодействие со средой. Машинно-генерируемая – базируется на мощном аппаратном обеспечении. Доступная для изучения – предоставляет возможность исследовать большой детализированный мир. Создающая эффект присутствия – вовлекает в процесс как мозг, так и тело пользователя, воздействуя на максимально возможное число органов чувств».

Компьютерное 3D-моделирование активно развивалось с 1960–1970-х гг., но стало широко доступным с появлением современных 3D-графических программ примерно 30–35 лет назад. Постепенно стало возможным построение реалистичных 3D-моделей, существующих как бы за экраном компьютера, отсюда название «виртуальных» моделей. То есть был реализован принцип VR. Модели VR реализованы и в российской Платформе napoCAD.

Виртуальную 3D-модель можно осмотреть со всех сторон, разрезать, получить произвольное сечение, отредактировать. Для модели можно выполнить прочностной расчет, для архитектурных объектов – построить перспективу, фото-реалистичное изображение и т. д.

В дополнение к рис. 1.1 рассмотрим еще один пример, показывающий преимущества компьютерной 3D-модели в сравнении с чертежом. На рис. 1.2 приведены 3D- и 2D-модели конуса (построение моделей – см. раздел 2.23.2). 3D-модель построена в Платформе napoCAD. Она является наглядной (рис. 1.2а, в). Применение цвета и света делает ее высокореалистичной. Панель свойств (рис. 1.2б) позволяет редактировать все параметры конуса – в частности, показан раздел редактирования геометрических параметров. Возможно автоматическое по-

строение разрезов (рис. 1.2в) и выполнение других многочисленных операций 3D-моделирования. Предусмотрены автоматические измерения геометрических характеристик – например, вычисление объема, площади поверхности, центра тяжести. Чертеж конуса, т. е. его 2D-модель (рис. 1.2г, д), этими свойствами не обладает.

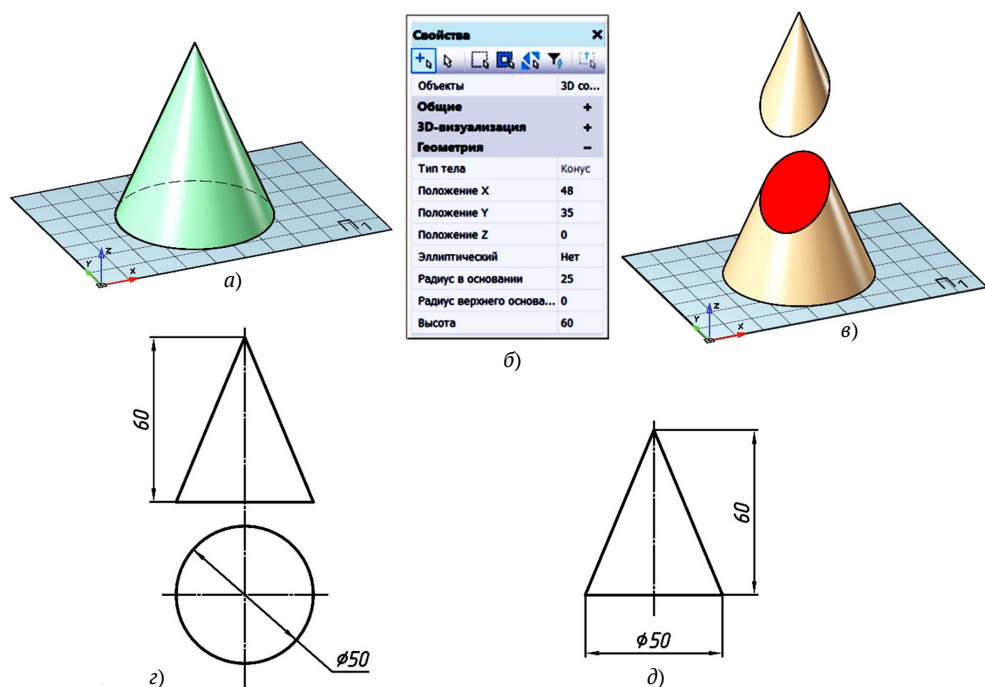


Рис. 1.2. Модель конуса:

а – 3D-модель; б – панель свойств с параметрами конуса;
 в – разрез как пример редактирования 3D-модели; г – 2D-модель; д – чертеж

Важным достоинством компьютерного 3D-моделирования является возможность автоматического построения чертежей. В современных САПР чертежи получают после того как создана 3D-модель, т. е. на завершающей стадии проектирования. Имеются эти возможности и в папоCAD. Их практическое применение, т. е. автоматическое построение чертежей, рассмотрено в последующих курсах инженерной и компьютерной графики [4].

3D-технология, использующая современное компьютерное оборудование и программное обеспечение, становится неотъемлемой частью проектирования на многих предприятиях и фирмах, а зачастую и основным методом проектирования. Появляются новые графические программы 3D-проектирования. Разработаны ГОСТы (государственные стандарты), при соблюдении которых компьютерная 3D-модель может быть передана в производство без построения чертежей. Для этого созданы программы, преобразующие компьютерную 3D-модель в траекторию режущего инструмента станков с ЧПУ (числовым программным управлением), что упрощает процесс изготовления детали.

Построение модели к рис. 1.2 приведено в разделе 2.23.2.

○ Лектору:

- откройте файл «Сравнение 2D-3D конус .dwg» (см. раздел 2.23.2). Можно на лекции воспроизвести рис. 1.2, построив конус;
- вращайте изображение конуса, демонстрируя виртуальную реальность;
- для сравнения постройте чертеж конуса и покажите, что это плоское изображение с низкой наглядностью;
- командами «Главная \ Утилиты \ Сведения» определите по 3D-модели объем конуса и площадь его поверхности;
- измените цвет конуса, командой «Разрез» разделите конус, а затем его верхнюю часть переместите вверх;
- командой «2D Вид» постройте чертеж конуса в автоматическом режиме.

1.4. Назначение чертежа и основы его построения

Чертеж – геометрическая модель объекта, построенная на плоскости (листе бумаги) по определенным правилам. Он состоит из проекций объекта и применяется в технике и строительстве для деталей, машин, зданий с целью их изготовления и контроля. Известна крылатая фраза: «Чертеж – язык техники» [7], к ней можно добавить: «международный язык техники».

1.4.1. Зачем сегодня нужен чертеж

Основное внимание в нашем курсе уделяется построению и исследованию 3D-моделей. Вместе с тем инженеру необходимо знание основ построения чертежа. Причины этого следующие:

- 1) исторически чертеж на бумаге стал первым носителем информации о геометрических свойствах объекта. На предприятиях хранятся огромные архивы чертежей, которые инженер должен уметь прочесть, понять геометрическую форму изделия и требования к его изготовлению;
- 2) чертеж в ортогональных проекциях обладает низкой наглядностью (это было показано на рис. 1.1б, г и 1.2г, д). Для его понимания необходимо знать, как чертеж был получен, чтобы мысленно восстановить образ объекта;
- 3) компьютерные 3D-модели, несмотря на их неоспоримые достоинства, еще не получили должного распространения ввиду недостаточного уровня компьютеризации производства. Поэтому задания рабочему по-прежнему выдаются в виде чертежей;
- 4) инженер должен обладать элементарными навыками черчения, чтобы в разговоре, в быту, выразить свою мысль в виде простого чертежа (эскиза);
- 5) в учебном процессе и в нашем курсе условия задач студентам выдаются в виде чертежей.

Таким образом, и сегодня роль чертежа как «языка техники» в инженерной подготовке сохраняется.

1.4.2. Требования к чертежу

Чертеж как «язык техники» должен отвечать трем требованиям: быть обратимым, наглядным и соответствовать государственным стандартам черчения (ГОСТ).

Обратимость чертежа – это однозначность восприятия пространственной формы отображенного на чертеже объекта. Обратимый чертеж не должен допускать различного толкования геометрической формы и размеров отображаемых на нем деталей, машин, зданий. Обратимость является основным требованием, предъявляемым к чертежу. Для технического чертежа обратимость предполагает также наличие технических условий для изготовления объекта.

Наглядность – мера восприятия чертежа человеком. Наглядный чертеж легко воспринимается без каких-либо текстовых комментариев. Для этого нужно построить необходимые изображения (виды, разрезы, сечения...). Дополнительно для наглядности применяют различные типы линий, линии различной толщины и цвета, аксонометрические и перспективные изображения.

Стандарты черчения определяют многочисленные требования к построению: размеры чертежа (его формат); типы и параметры линий; указания, как правильно выполнить разрез, сделать надпись, проставить размеры и т. д.

В нашем теоретическом курсе мы рассмотрим обратимость чертежа с позиций геометрии, т. е. восприятия пространственной формы объекта. Технические требования, прежде всего простановку размеров, а также наглядность и стандарты, будем изучать в курсе инженерной и компьютерной графики [4].

1.4.3. Метод проецирования

Проекция – это изображение трехмерного объекта на плоскости. Из проекций объекта состоит его чертеж.

Метод проецирования, которым осуществляется построение проекций, состоит в следующем (рис. 1.3). Пусть имеется объект, например прямоугольник $ABCD$ и плоскость Π' , на которой необходимо построить проекцию объекта. Эту плоскость также называют плоскостью проекции или картинной плоскостью. Различают центральное, параллельное и ортогональное проецирование. При центральном проецировании (рис. 1.3а, б) назначают центр проецирования – точку S . Через центр S проводят проецирующие лучи $SA, SB \dots$, проходящие через точки объекта. Находят точки $A', B' \dots$ пересечения лучей с плоскостью картины. Найденные точки являются проекциями точек объекта – например, точка A' является проекцией точки A (запись этого соотношения: $A \rightarrow A'$). Множество точек-проекций образуют проекцию объекта. Так, отрезок $AB \rightarrow A'B'$. Чертыреугольник $ABCD \rightarrow A'B'C'D'$.

Центральное проецирование

Основной вид проецирования – центральное проецирование. Остальные – его частные случаи. Некоторые свойства центрального проецирования (см. рис. 1.3а):

- 1) проекцией точки является точка;

- 2) проекцией прямой линии является также прямая линия; исключение составляют прямые, которые проецируются в точку. Например, точка A' является проекцией луча SA ;
- 3) точка пересечения прямых линий отображается в точку пересечения их проекций.

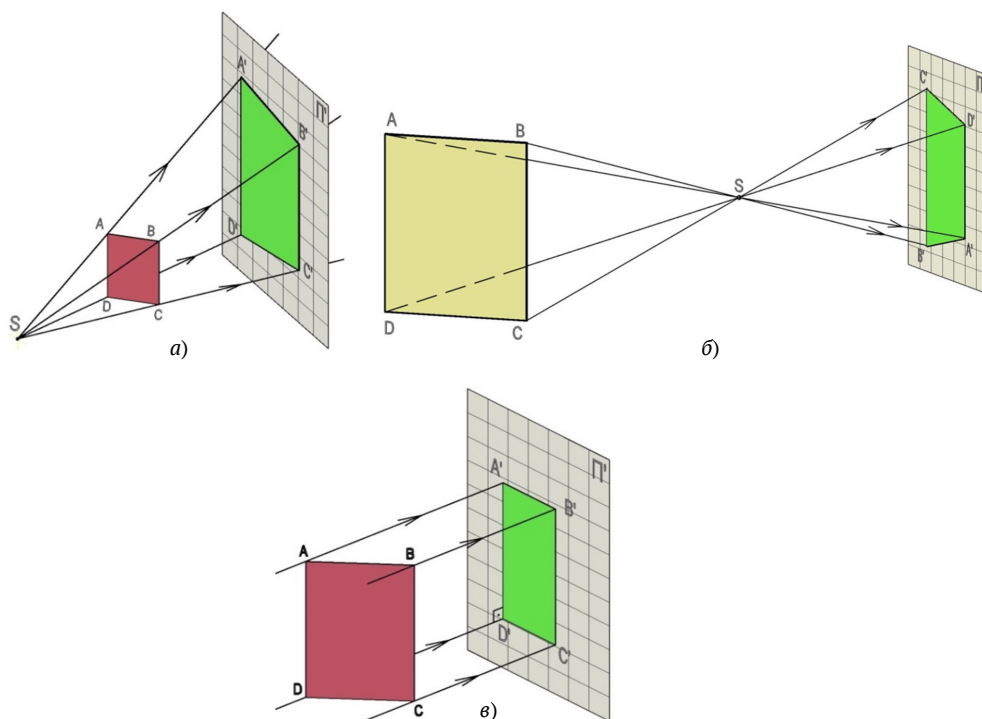


Рис. 1.3. Методы проецирования:

а, б – центральное проецирование; в – ортогональное проецирование

При центральном проецировании проекции параллельных прямых в общем случае отображаются в пересекающиеся прямые. Например, стороны прямоугольника AB и CD взаимно параллельны ($AB \parallel CD$), однако их проекции $A'B'$ и $C'D'$ являются отрезками пересекающихся прямых. Исключение составляют взаимно параллельные отрезки, если они параллельны картинной плоскости. Проекция таких отрезков также взаимно параллельны. Например, если $AD \parallel BC \parallel \Pi'$, то $A'D' \parallel B'C'$.

Вариант центрального проецирования (рис. 1.3б) соответствует нашему зрению: точка S – центр хрусталика глаза, картинная плоскость Π' – сетчатка. Поэтому центральное проецирование позволяет получить на плоскости изображение, в первом приближении соответствующее зрительному восприятию. Центральная проекция, выполненная в определенных условиях, называется перспективной проекцией. Преимущественная область применения центрального проецирования – построение перспективных проекций в архитектуре.

Параллельное проецирование

При бесконечном удалении центра проецирования от картинной плоскости проецирующие лучи становятся взаимно параллельными. Такое проецирование называют параллельным проецированием. Оно позволяет, например, построить тень от солнечных лучей. Отмеченные выше три основных свойства центрального проецирования сохраняются и при параллельном проецировании, но к ним добавляются еще два свойства:

- 4) проекция отрезка, параллельного плоскости, конгруэнтна самому отрезку. Конгруэнтность в геометрии – это совпадение отрезков или фигур при совмещении. Это свойство относится и к плоским фигурам, если их плоскость параллельна плоскости проекции;
- 5) проекции параллельных прямых также взаимно параллельны.

Ортогональное проецирование

Для технических приложений применяют ортогональное проецирование (рис. 1.36). Это частный случай параллельного проецирования, в котором проецирующие лучи перпендикулярны плоскости проекций. Ортогональное проецирование обладает приведенными выше свойствами центрального и параллельного проецирования. К его дополнительным свойствам относится особенность проецирования прямого угла (см. раздел 5.9). Ортогональное проецирование наиболее полно передает восприятие объекта, если направление взгляда перпендикулярно плоскости картины, экрана компьютера или чертежа.

- Лектору:
 - откройте файл «Методы проецирования .dwg» (см. раздел 2.23.3);
 - покажите компоненты центрального проецирования (ЦП): центр, объект, лучи, картину, проекцию;
 - поясните основные свойства ЦП. Обратите внимание на проецирование параллельных прямых – их проекции в общем случае являются пересекающимися прямыми;
 - поясните модель и свойства ортогонального проецирования как основного метода построения чертежа.

1.4.4. Проецирование на две плоскости как условие обратимости чертежа

Если точку с проекции (с картинной плоскости) перемещать обратно по лучу ее проецирования (по обратному лучу), то точка может занимать произвольное положение на этом луче. Например (рис. 1.4а), точка A' является ортогональной проекцией точек A, K, L, M, N и в целом всего луча a . Прямоугольник $A'B'C'D'$ является проекцией множества геометрических объектов: пространственных плоских четырехугольников α и β , криволинейной поверхности γ (например, гиперболического параболоида) и призмы δ , контуры которых отображаются в $A'B'C'D'$. Из этого примера наглядно следует, что одна проекция не обеспечивает обратимости чертежа.

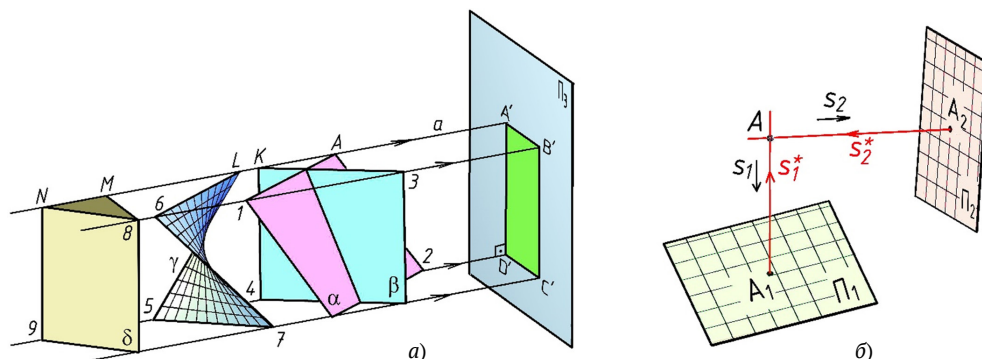


Рис. 1.4. Обратимость чертежа:

a – необратимость при одной проекции; *б* – две проекции как условие обратимости

Для того чтобы точка однозначно воспроизводилась в пространстве, она должна быть пересечением двух обратных лучей. Поясним это на рис. 1.4б. Пусть для точки A построены проекции A_1 и A_2 на предварительно заданные плоскости Π_1 и Π_2 . Направление проецирования определено векторами s_1 и s_2 . Имея названные проекции и восстановив обратные лучи s_1^* и s_2^* , получим точку A как единственный результат пересечения обратных лучей.

Наличие двух проекций модели является необходимым и достаточным условием обратимости чертежа этой модели.

Необходимость означает, что чертеж должен содержать минимум две проекции. Имеются исключения, когда чертеж понятен с одной проекцией. Это относится к техническим чертежам, которые могут быть дополнены специальными символами или комментариями. Например, на чертеже конуса (см. рис. 1.2д) знак диаметра делает обратимым чертеж, содержащий одну проекцию.

Наличие двух проекций является и *достаточным* условием обратимости. То есть если на чертеже заданы две проекции и известно, как они были построены, то чертеж обратим (здесь также имеются коварные исключения: две, но не любые две). Из этого следует, что по двум проекциям можно построить третью, четвертую и любую другую проекцию объекта. Поэтому, если на чертеже приведено более двух проекций, это сделано для повышения наглядности чертежа.

○ Лектору:

- откройте файл «Обратимость чертежа .dwg», воспроизводящий модель рис. 1.4а (см. раздел 2.23.4);
- поясните, что однопроекционный чертеж необратим;
- поясните необходимость двух проекций как условия обратимости чертежа.

1.4.5. Эпюр Монжа

За 225 лет существования начертательной геометрии было разработано множество методов создания обратимых чертежей. Основным из них, принятым при построении чертежей, является метод Гаспара Монжа (о Г. Монже см. выше, раздел 1.3.3).

Сущность метода Монжа состоит в том, что объект ортогонально проецируют на две взаимно перпендикулярные плоскости. Затем для получения плоской модели горизонтальную плоскость вместе с проекциями поворачивают вокруг линии пересечения плоскостей до совмещения с фронтальной плоскостью. Полученное плоское изображение является обратимым чертежом объекта.

Метод Монжа пояснен на рис. 1.5 на примере построения чертежа точки A . Точка A задана в декартовой системе координат (рис. 1.5а). Вводим две плоскости проекций (рис. 1.5б). Плоскость Π_1 совпадает с координатной плоскостью XOY , плоскость Π_2 – с плоскостью XOZ . Строим проекции точки A на эти плоскости – это точки A_1 и A_2 . Модель дополняем отрезками перпендикуляров (A_2, A_{12}) и (A_1, A_{12}), опущенных из точек проекций на ось OX . Получаем пространственную модель точки A , содержащую две ее проекции.

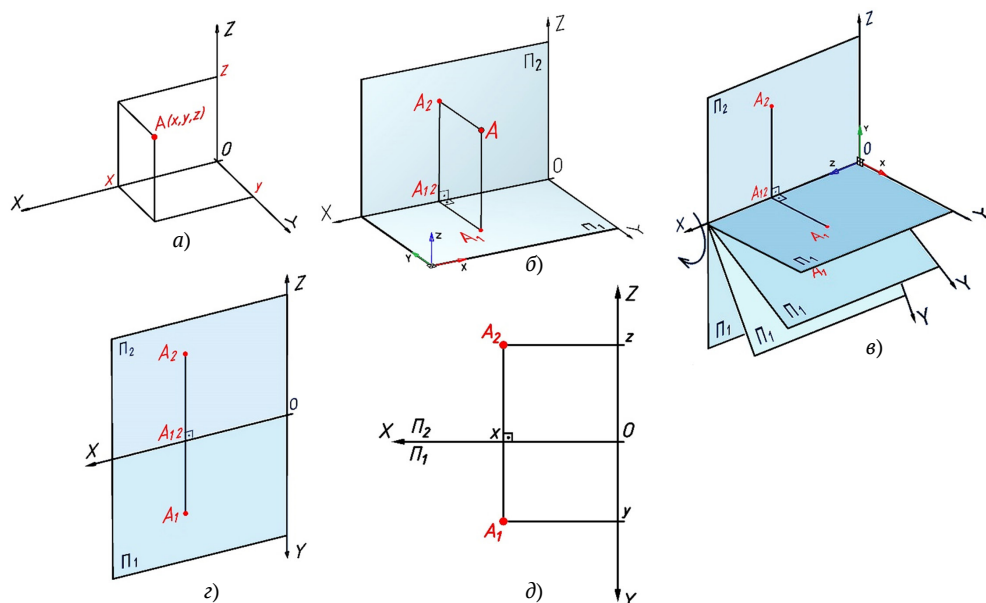


Рис. 1.5. Пространственная модель построения чертежа точки:

- а – точка в декартовой системе координат;
- б – ортогональное проецирование точки на две плоскости;
- в – вращение горизонтальной плоскости проекций;
- г – совмещение плоскостей в единую плоскость чертежа;
- д – чертеж точки в двух проекциях

Для перехода от пространственной модели к плоской вращаем (рис. 1.5в) плоскость Π_1 вместе с проекцией A_1 и перпендикуляром (A_1, A_{12}) вокруг оси OX до совмещения с плоскостью Π_2 . При этом отрезки (A_2, A_{12}) и (A_1, A_{12}) совмещаются в линию (A_1, A_2). Изображение, получаемое в плоскости Π_2 , является двухпроекционным чертежом точки A (рис. 1.5г, д).

Чертеж, полученный по методу Монжа, называют «комплексным чертежом» или «эпюром Монжа» («эпюр» – от франц. *epure*, чертеж).

Последовательность построения чертежа точки (эпюр Монжа для точки)

1. На плоскости построений (на листе бумаги) нанесите оси декартовой системы координат $OXYZ$ (см. рис. 1.5*д*).
2. На оси X отложите X -координату точки A . Через найденную точку проведите вертикальный отрезок.
3. На построенном отрезке от оси X вверх отложите Z -координату точки и поставьте точку A_2 – это фронтальная проекция точки A .
4. На том же отрезке от оси X вниз отложите Y -координату и обозначьте точку A_1 – это горизонтальная проекция точки A . Чертеж построен.

1.4.6. Трехпроекционный комплексный чертеж

3D-модель построения трехпроекционного чертежа точки A приведена на рис. 1.6. Добавлена плоскость Π_3 и построена профильная проекция A_3 (рис. 1.6*а*). Добавлены отрезки (A_1, A_{13}) и (A_3, A_{13}) , перпендикулярные к оси Y . Затем плоскость Π_1 с проекцией A_1 и отрезком A_1-A_{13} вращают вокруг оси OX до совмещения с плоскостью Π_2 – получена рассмотренная выше модель двухпроекционного чертежа. Дополнительно плоскость Π_3 с проекцией A_3 и отрезком (A_3, A_{13}) вращают вокруг оси OZ до совмещения с Π_2 (рис. 1.6*б*). Плоское изображение (рис. 1.6*в*), полученное при совмещении трех плоскостей, является комплексным чертежом точки A , содержащим три проекции (рис. 1.6*г*).

Важно понимать, что поскольку обратимость чертежа определяется двумя проекциями, то третья и любая другая проекция является следствием первых двух проекций. В рассмотренном примере (см. рис. 1.6*г*) это проявляется в том, что вследствие вращения и совмещения плоскостей проекций происходит «раздвоение» оси Y : одна из них, для нее сохраняют обозначение Y , направлена вниз вдоль оси Z , вторая – ось Y' – направлена вправо вдоль оси X . Это позволяет по оси Y' откладывать координаты, измеренные по оси Y . Таким образом, проекция A_3 имеет координаты Y, Z , взятые с проекции A_1 и A_2 , т. е. является их следствием.

Для построения трехпроекционного чертежа точки A необходимо (см. рис. 1.6*г*):

- 1) построить двухпроекционный чертеж, т. е. фронтальную A_2 и горизонтальную A_1 проекции точки A (см. выше, рис. 1.5*д*);
- 2) продлить вправо ось X и обозначить ее как ось Y' . Отложить на новой оси Y' -координату точки A_1 ;
- 3) через точку u оси Y' провести вертикальный, а через точку z – горизонтальный отрезки. Точку их пересечения обозначить как A_3 – это третья, профильная проекция точки A .

Равенство координат Y , откладываемых по осям Y и Y' , позволяет для построения проекции A_3 применять циркуль или линию преломления OK , проведенную под 45° (рис 1.6з).

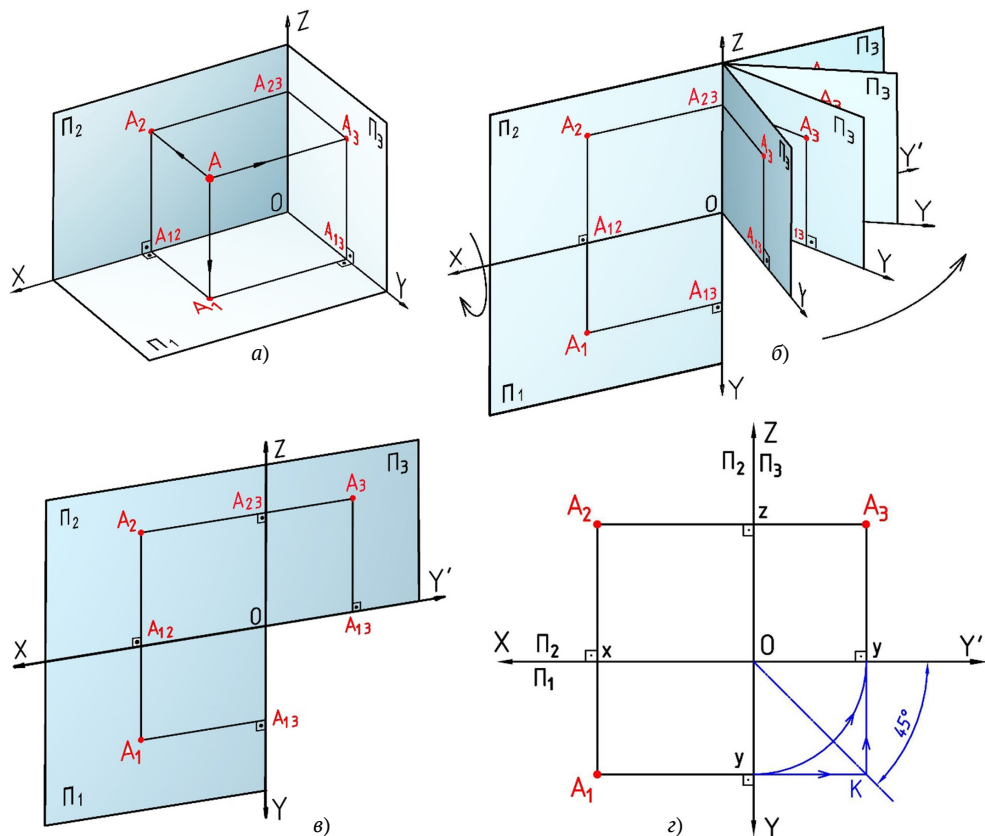


Рис. 1.6. Построение трехпроекционного чертежа точки:

- а* – ортогональное проектирование на три плоскости;
б – вращение профильной плоскости проекций; *в* – совмещение трех плоскостей;
г – чертеж точки в трех проекциях

1.4.7. Обозначения объектов и проекций на чертежах.

Проекционная связь

В курсе начертательной геометрии объектам и их проекциям присваивают имена. Точки обозначают прописными буквами латинского алфавита или цифрами; линии и их отрезки – строчными буквами латинского алфавита; плоскости и поверхности – буквами греческого алфавита.

Плоскости проекций для эпюра Монжа и ортогонального чертежа обозначают прописной буквой греческого алфавита Π (читается «пи») с добавлением подстрочного индекса. Горизонтальная плоскость проекций обозначается как Π_1 , фронтальная – Π_2 , профильная – Π_3 .

Проекциям объектов присваивают подстрочный индекс, указывающий, на какую поверхность построена проекция. Например, 1_1 , A_1 , b_1 , Δ_1 , α_1 – соответственно проекции точек 1 , A , отрезка b и плоскостей (поверхностей) Δ и α на плоскость Π_1 .

В результате разворота плоскостей проекций и совмещения их в единую плоскость чертежа между проекциями установлена проекционная связь. Рассмотрим ее на примере чертежа точки A (рис. 1.6з):

- 1) горизонтальная и фронтальная проекции точки принадлежат единой вертикальной линии связи. На рис. 1.6з такая линия – это отрезок (A_1, A_2) , является совмещением в единую прямую отрезков (A_1, A_{12}) и (A_{12}, A_2) ;
- 2) фронтальная и профильная проекции точки принадлежат горизонтальной линии связи – это отрезок A_2-A_3 ;
- 3) горизонтальная и профильная проекции принадлежат ломаной линии связи (A_1, K, A_3) , получаемой с помощью линии преломления. Линия преломления – биссектриса угла OYY' .

○ Лектору:

- откройте файл «Эпюр Монжа .dwg», воспроизводящий модели на рис. 1.6а (см. раздел 2.23.5);
- покажите вращение плоскостей Π_1 и Π_2 вместе с проекциями до совмещения в единую плоскость (см. рис. 1.6б);
- после совмещения плоскостей установите вид на плоскость и покажите полученный чертеж – эпюр Монжа (см. рис. 1.6в) из трех проекций;
- покажите компоненты и проекционную связь точек чертежа (см. рис. 1.6з).

1.5. Построение 3D-моделей в Платформе nanoCAD

После рассмотрения геометрической модели в виде чертежа перейдем к современному методу геометрического моделирования – компьютерному 3D-моделированию в Платформе nanoCAD.

1.5.1. 3D-модели и режимы их построения

Пространственные объекты nanoCAD подразделяют на линии, сети, поверхности, твердотельные модели.

Линии применяют для построения контуров, каркасов моделей, линий пересечения тел и для вспомогательных построений.

Сети и поверхности можно представить как пленку нулевой толщины. Простейшая поверхность – плоскость. Поверхностные и сетевые модели позволяют воспроизводить сложные пространственные формы (мебель в интерьерах, горный рельеф, корпус автомобиля и др.).

Твердотельные модели рассматривают как наполненные материалом. Эти модели могут иметь сложную пространственную форму. Наряду с поверхностными свойствами (площадь, контуры сечений) для твердотельных моделей

можно определить объемные свойства (массу, центр тяжести, моменты инерции). Твёрдотельные модели также называют *телами*, *солидами* (Solid – твёрдый, сплошной, цельный). Такие модели преимущественно применяются для построения моделей машиностроительных деталей и узлов, моделей зданий и сооружений. Подробнее см. ниже, раздел 1.5.4.

Объектами нашего теоретического курса будут точка, линии (отрезок прямой, окружность, эллипс, сплайн) и тела (параллелепипед, сфера, конус и др.).

В Платформе napoCAD предусмотрены следующие режимы моделирования: прямое, параметрическое, листовое моделирование, сети. Режимы сгруппированы в разделе:

◆ Лента \ 3D-инструменты \ Режимы моделирования.

Каждый режим имеет свою область применения, набор команд, алгоритмов построений и типы объектов. Мы будем применять режим и объекты прямого моделирования (см. ниже раздел 1.5.4). Этот режим рассматривается как наиболее простой в изучении. Параметрическое моделирование сложнее в освоении и реализации, но имеет более широкие возможности редактирования моделей на любой стадии их создания. Этот и остальные режимы и объекты рассматриваются в курсе компьютерной графики [4].

Начнем с простейших 3D-моделей (точка, отрезок прямой, треугольник, параллелепипед).

1.5.2. Построение точки

Точка в геометрии – это абстрактный объект, не имеющий размеров, характеризующийся только своим положением в пространстве. В теоретическом курсе точка является самостоятельным объектом многих задач, в которых нужно построить точку и отобразить ее на экране. Точки на экране отображаются маркерами. В Платформе napoCAD предусмотрен большой набор маркеров, которые имеют различную форму, им можно придать различный размер и цвет. Для простановки точек-маркеров применяют команду «Точка». Координаты задают в текущей системе координат ПСК. О настройке маркеров и построении точек см. раздел 2.7.1.

○ Лектору:

- в шаблоне постройте точку с координатами (60.5, 50, 40). Покажите маркер точки во всех видовых окнах шаблона;
- покажите раздел 2.10 о задании и вводе координат в командную строку.

1.5.3. Модели отрезка и треугольника

Следующим «по значимости» объектом нашего курса является отрезок прямой линии. Напомним определение: прямая линия – геометрическое место точек, в котором расстояние между двумя произвольными точками является минимально возможным. Отрезок – часть прямой линии.

Многие задачи нашего курса ориентированы на операции с отрезками. Для построения отрезков применяют команду «Отрезок». О построении отрезка по координатам его конечных точек см. раздел 2.7.2.

На рис. 1.7 показана 3D-модель треугольника, образованного тремя отрезками. Координаты конечных точек отрезка, являющихся вершинами треугольника, заданы в таблице (рис. 1.7а). Модель (рис. 1.7б) показана в шаблоне, содержащем три видовых экрана, в которых объект отображен сверху, спереди и в аксонометрии (о шаблоне см. раздел 2.20). Для наглядности модели командой «Область» из контура треугольника создана плоская фигура. В видовых экранах установлен визуальный стиль «Концептуальный». Построена проекция треугольника на Π_1 . (О построении модели треугольника см. раздел 2.7.2.)

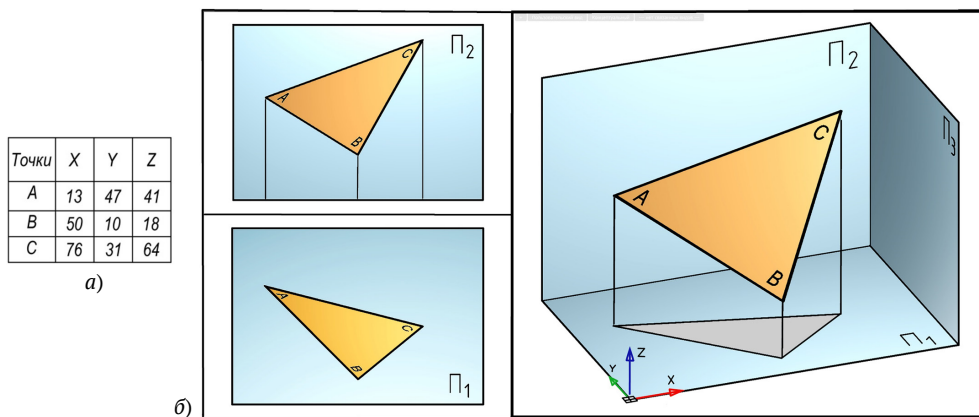


Рис. 1.7. Модель треугольника:

а – координаты вершин в МСК; б – отображение в видовых экранах шаблона

Отрезок прямой линии является одним из многочисленных линейных объектов, команды построений этих объектов расположены:

- ◆ Лента \ Вкладка «Главная» \ Группа «Черчение» или «Построение» \ Команда «Отрезок».

При дальнейшем указании команд будем применять сокращенную запись. Для наглядности возможно добавление кнопки команды:

- ◆ Главная \ Черчение \ Отрезок

- Лектору: покажите расположение команд линейных объектов в Ленте. В шаблоне, окне аксонометрии, в МСК постройте треугольник из отрезков по координатам (рис. 1.7а). Из отрезков создайте область. Командой «Конвертирование в 2D» постройте проекцию треугольника на Π_1 .

1.5.4. Твердотельные 3D-модели прямого моделирования. Параллелепипед

В режиме прямого моделировании 3D-модели формируют из так называемых геометрических примитивов – это параллелепипед, конус, сфера и др., а также из объектов, получаемых вращением, перемещением и вытягиванием плоского контура. Команды построения этих моделей расположены:

- ◆ 3D-инструменты \ Режимы моделирования \ Прямое \ Прямое моделирование.

Более сложные модели создаются с помощью команд объединения, вычитания и пересечения. Выполнение таких команд называется «булевы операции», и мы будем активно применять их при изучении линий пересечения тел. Булевы операции расположены:

◆ 3D-инструменты \ Булевы операции.

Примером геометрического примитива является параллелепипед (рис. 1.8). На рис. 1.8а параллелепипед показан в визуальном стиле «Скрытые линии», с отображением сетки. На рис. 1.8б – в шаблоне, в трех видах и юго-западной аксонометрии (координатные плоскости шаблона отключены). В окне аксонометрии включен визуальный стиль «Концептуальный». (О построении параллелепипеда см. раздел 2.7.3.)

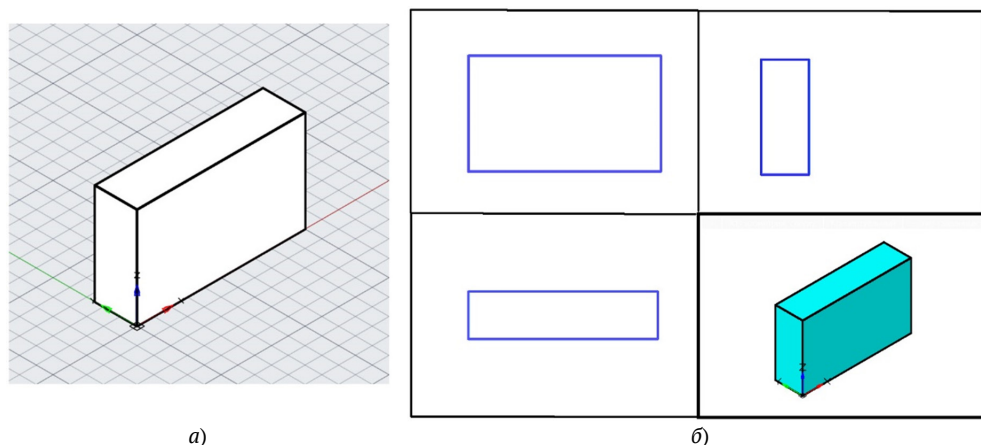


Рис. 1.8. Параллелепипед в пространстве модели (а) и на листе в видовых экранах шаблона (б)

○ Лектору:

- покажите на Ленте расположение команд прямого моделирования и булевых операций;
- в шаблоне постройте параллелепипед (Первый угол: 20,30 \ Другой угол: @60,15 \ Высота: 40).

1.6. Средства достижения точности компьютерных построений

Решение задач теоретического курса предполагает предельную точность результата построений, по которому будет оцениваться правильность решения. Рассмотрим средства достижения точности, предусмотренные в Платформе nanoCAD.

1.6.1. Точность вычислений и построений. Задание координат

Необходимо различать точность построений и точность вычислений. *Точность построений* определяется алгоритмом решения, т. е. зависит от пользователя. При неправильном алгоритме результат неизбежно будет ошибочным.

Точность вычислений Платформы nanoCAD определяется вычислителем программы и зависит от выполняемой операции. Например, погрешность вычисления расстояния между точками или координат точек взаимного пересечения отрезков прямой линии, отрезков с окружностью и с плоскостью не превышает 10^{-8} . Однако погрешность вычислений координат линий пересечений кривых поверхностей может быть значительно выше (а точность, соответственно, ниже), до 10^{-4} . Но и такая погрешность совершенно допустима для большинства задач.

В разделе 2.9 приведена оценка точности построений и вычислений на примере исторической задачи о свойстве изометрии куба.

При выводе результатов вычислений в текстовый экран по команде «Список», в панель «Свойства» или в строку состояния (см. рис. 2.1, поз. 12) значения округляются. Округление задается командой «Единицы» (см. раздел 2.9).

В шаблоне (см. раздел 2.20) округление линейных десятичных единиц задано 0.00 («до сотых»), угловых единиц (градусы) – 0.0 («до десятых»). При необходимости точность может быть скорректирована в большую или меньшую сторону.

Основной вариант построений – это построения по координатам, вводимым с командной строки. Предусмотрен ряд режимов ввода: декартовы координаты (это основной режим), полярные, цилиндрические, сферические системы координат, режим динамического ввода. Ввод координат в различных режимах рассмотрен в разделе 2.10.

Для повышения точности построений и вычислений предусмотрен ряд технических средств. Из них в нашем курсе будем применять режимы «ОРТО», «ОТС-ПОЛЯР», «ШАГ» и объектную привязку. О назначении и настройке режимов – см. разделы 2.12, 2.13.

○ Лектору:

- покажите отслеживание координат в строке состояния. Постройте несколько отрезков, включая-отключая режим «ОРТО». Покажите действие режима «ОТС-ПОЛЯР»;
- покажите раздел 2.9 об оценке точности построения изометрии.

1.6.2. Объектная привязка в 2D-построениях. Круги Аполлония

При выполнении точных геометрических построений возникает необходимость задать точку графического объекта с определенными качественными свойствами. Например, провести отрезок из центра ранее построенной окружности (т. е. найти точку центра), построить отрезок из конечной точки ранее построенной дуги (т. е. найти конечную точку дуги), построить касательную к окружности (т. е. найти точку касания) и др. Такие задачи требуют рассчитать координаты точки в зависимости от ее положения относительно объекта и задать такую точку. Эти действия с максимальной компьютерной точностью автоматически выполняет вычислитель nanoCAD. Процесс задания таких точек

называется «объектной привязкой». Это инструмент, позволяющий для графического объекта определить и задать точку с заданными свойствами.

Объектная привязка является основным инструментом точных построений для решения задач нашего теоретического курса. О настройке объектных привязок – см. раздел 2.13.1.

На рис. 1.9 приведены три задачи, характерные для нашего курса и показывающие действие и применение объектных привязок в 2D-построениях, т. е. на плоскости.

Задача 1 (рис. 1.9а). Из середины отрезка a провести отрезок m , касательный к окружности с до пересечения с отрезком b .

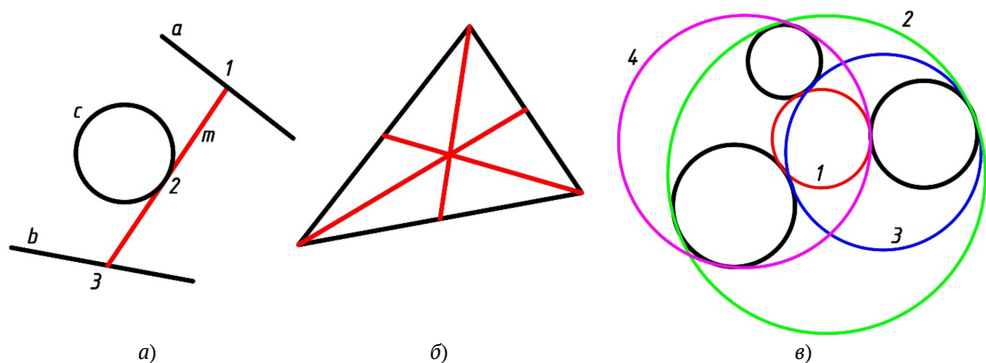


Рис. 1.9. Примеры геометрических построений на плоскости с объектными привязками: a – отрезок; b – пересечение медиан; c – круги Аполлония

Построения – см. раздел 2.13.2.

- Лектору: постройте исходные объекты a , b , c и отрезок m с применением объектных привязок.

Задача 2 (рис. 1.9б). В произвольном треугольнике построить медианы внутренних углов.

«Проверить» теорему «Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении 2:1, считая от вершины треугольника» (см. раздел 2.13.3).

- Лектору: выполните построения и покажите действие теоремы о свойствах медиан треугольника.

Задача 3 (рис. 1.9в). Построить окружность, касательную к трем окружностям.

Это также задача на применение объектной привязки, но задача особая, имеющая глубокие исторические корни. Рассмотрим эту задачу подробно.

Задача пришла из древней Греции и известна как задача Аполлония. Аполло́ний Пергский (262–190 до н.э.) – древнегреческий математик, великий геометр античности. Информацию об Аполлонии и его знаменитой задаче можно найти в интернете. Решение, данное самим Аполлонием, утеряно. Известны реше-

ния, полученные геометрами в средние века. Исследования этой задачи продолжают и сегодня, разрабатываются новые алгоритмы ее решения.

Ввиду геометрической важности задачи алгоритм ее построения внесен в программное обеспечение Платформы nanoCAD и других САПР (систем автоматизированного проектирования).

На рис. 1.9в для трех окружностей (показанных черным цветом) приведены четыре круга Аполлония. Алгоритм построения и анализ этой задачи см. в разделе 2.13.4.

- Лектору: постройте три окружности и к ним несколько кругов Аполлония с внешним и внутренним касанием. В разделе 2.13.4. покажите геометрический узор (рис. 2.7) из кругов Аполлония и предложите студентам его построить.

1.6.3. Объектная привязка в 3D-построениях

Перейдем к задачам на пространственные построения, основанным на применении объектных привязок. Рассмотрим две типовые задачи.

Задача 4 (рис. 1.10а). Построить пространственную конструкцию из отрезков, в которой точки 1, 2, 3 – это угловые точки координатных плоскостей, точка 4 – основание перпендикуляра, опущенного из точки 3 на отрезок (1, 2), точка 5 – средняя точка отрезка (3, 4), точка 6 – центр круга, вписанного в треугольник (1, 4, 5), отрезок (6, 7) – перпендикуляр к плоскости круга, длина перпендикуляра должна быть 50 мм. Определить координаты точки 7 в МСК.

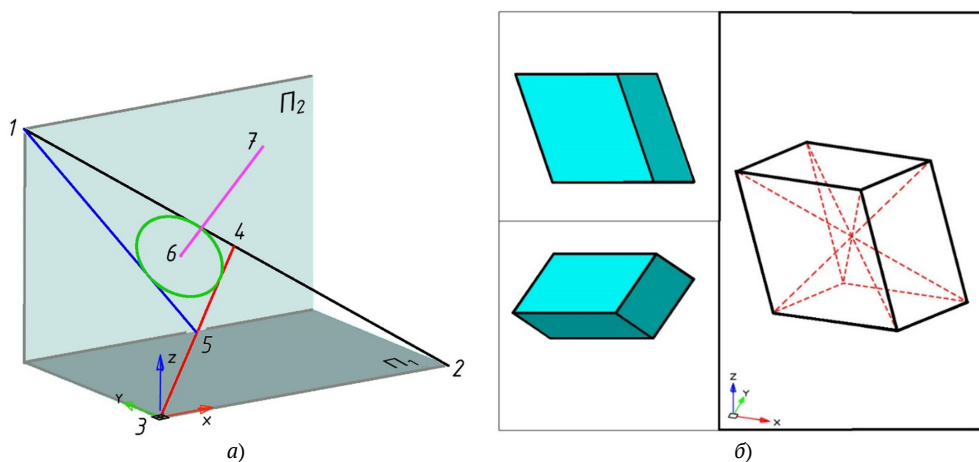


Рис. 1.10. Объектная привязка в 3D-построениях:
а – пример 3D-построений; б – пересечение диагоналей параллелепипеда

Эта задача характерна тем, что в ней задействованы практически все объектные привязки, которые понадобятся при решении задач нашего курса. Это «Конточка», «Нормаль», «Середина», «Касательная», «Центр». Еще две привязки, «Пересечение» и «Узел», также активно применяемые в наших задачах, рассмотрим в следующем примере.

Результат решения задачи приведен на рис. 1.10а. Последовательность построения – см. раздел 2.13.5.

- Лектору: в шаблоне постройте конструкцию (рис. 1.10а) с применением объектной привязки.

Задача 5. В произвольном параллелепипеде определите точку пересечения его диагоналей.

Решение задачи основано на применении объектных привязок. Оно воспроизводит известное из школьного курса геометрии свойство параллелепипеда, что все его диагонали пересекаются в одной точке, в этой точке делятся пополам и что точка пересечения диагоналей является центром симметрии параллелепипеда. Убедимся в этом, выполнив геометрические построения и необходимые измерения.

На рис. 1.10б показано решение для произвольного (наклонного) параллелепипеда, все стороны которого являются параллелограммами. Применен визуальный стиль, в котором диагонали и скрытые ребра отображены штриховой линией. Диагонали построены с применением объектной привязки «Конточка» к углам параллелепипеда.

Пересечение диагоналей подтверждается тем, что при подведении курсора к месту проверяемого пересечения возникает сообщение объектной привязки «Пересечение». Для наглядности в место пересечения поставлена точка (маркер).

Равенство частей диагоналей, разделенных точкой пересечения, подтверждается измерениями, выполненными командой «Дист». Применение команды «Масс-хар – Геометрия и масса» дополнительно показывает свойство параллелепипеда, состоящее в том, что точка пересечения диагоналей является центром тяжести параллелепипеда.

Построение, решение и измерения параллелепипеда и его диагоналей приведены в разделе 2.13.6.

- Лектору: постройте прямой параллелепипед , его диагонали и покажите их пересечение постановкой маркера точки. Командой «Геометрия и масса»  определите координаты центра тяжести. Сравните координаты и покажите совпадение точек.

1.7. Построение 3D-модели по ее чертежу

В разделе 1.4.1 отмечена важная роль чертежа в производстве, при проектировании и изготовлении деталей, машин, зданий. В нашем курсе и в последующем курсе компьютерной графики условия задач и заданий выдаются студентам также в виде чертежей. Решение начинается с того, чтобы по чертежу построить 3D-модели заданных объектов.

Рассмотрим алгоритм построения 3D-модели по ее чертежу.

1.7.1. Осный и безосный чертежи

Чтобы построить объект, нужно знать координаты точек объекта и систему координат, в которой они определены. Выше были приведены чертежи отрез-

ка (см. рис. 1.1б), конуса (рис. 1.2б), точки (рис. 1.5д, 1.6г), построенные в осях системы координат, принятой в начертательной геометрии и в которой рассмотрено создание эпюра Монжа. Эту систему назовем системой координат Монжа (см. раздел 2.14).

В Платформе nanoCAD основной является мировая система координат МСК (см. раздел 2.6.1). Эта система установлена по умолчанию (т. е. в новом файле), и все построения начинаются в этой системе. Поэтому при построении 3D-моделей координаты будем задавать в этой системе или в производных от нее системах, так называемых ПСК (пользовательских системах координат).

Чертежи, на которых нанесены оси координат, называют «осными», т. е. «с осями, в осях». Осный чертеж позволяет определить как форму объекта, так и его положение относительно осей координат. Однако чаще всего имеет значение только форма объекта, а не его положение относительно системы координат. Форма определяется не значениями координат, а размерами, которые являются разностями одноименных координат точек объекта и не зависят от положения осей или положения объекта в этих осях.

Поэтому на практике, на реальных чертежах, оси координат не приводят, а лишь подразумевают их направление. При этом сохраняют проекционную связь, а расстояние между проекциями задают из условий рационального расположения проекций на формате чертежа, оставляя место для простановки размеров. Чертеж, выполненный с соблюдением проекционной связи, но без нанесенных осей называют безосным чертежом. В нашем курсе условия задач заданы безосными чертежами – например, чертеж треугольника (см. рис. 1.11а). В курсах инженерной и компьютерной графики чертежи деталей и узлов машин, зданий и сооружений также выполняют безосными.

1.7.2. Алгоритм построения 3D-модели по безосному чертежу

Если на чертеже не приведены оси, т. е. чертеж безосный, то следует нанести вспомогательные оси и перейти к построению 3D-модели по координатам, измеренным в этих осях. То есть необходимо перейти к основному чертежу во вновь введенной системе координат. Рассмотрим эти действия подробнее.

Примером безосного чертежа является чертеж треугольника *DEF* (рис. 1.11а). Чтобы построить 3D-модель этого треугольника, введем вспомогательные оси координат, относительно которых измерим координаты вершин треугольника. Положение осей не влияет на форму и размеры треугольника. Поэтому оси можно задать с учетом удобства измерения координат вершин или наглядности модели. Например, оси можно провести через проекции вершин *D* и *E* (рис. 1.11б). Это позволит часть координат этих точек задать равными нулю (рис. 1.11в). В результате на 3D-модели (рис. 1.9г) точка *E* расположена на оси *X* и проекция точки *D* – на оси *Y*.

Итак, задан безосный чертеж объекта (треугольника) (см. рис. 1.11а). Требуется по данному чертежу построить 3D-модель. Алгоритм построения следующий:

- ◆ на поле чертежа (на странице рабочей тетради) нанесите оси системы координат, задав их с учетом удобства измерений координат точек. Напри-

мер, проведите оси через нижние и крайние левые точки проекций. Оси Y и Z должны быть на одной вертикальной прямой (см. рис. 1.11б);

- ◆ измерьте координаты точек объекта. Измерения для задач в рабочей тетради можно выполнять с точностью до 0.5 мм. Координаты можно нанести на чертеже как координатные размеры относительно осей (рис. 1.11б) или в виде текста (рис. 1.11в);
- ◆ создайте новый файл на основе шаблона (см. раздел 2.2);
- ◆ перейдите в видовой экран аксонометрии; убедитесь, что активна МСК;
- ◆ стройте объект по измеренным координатам.

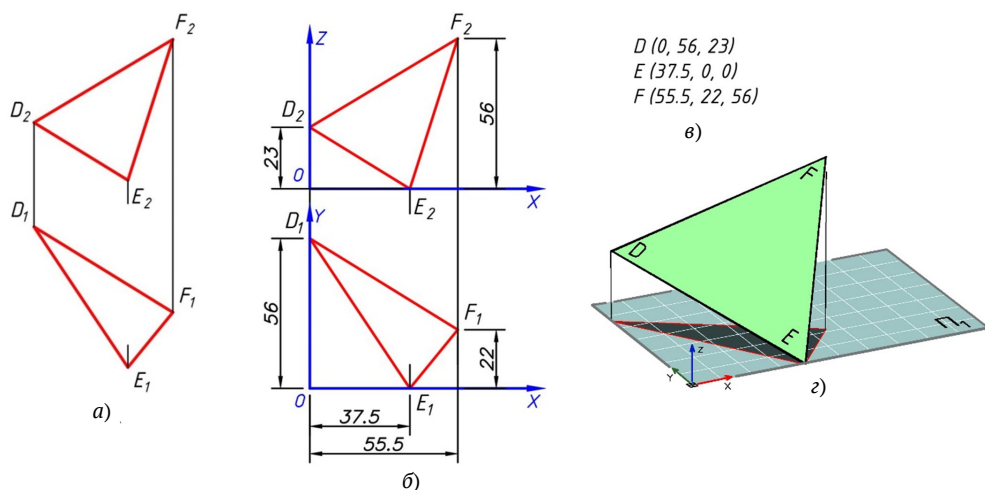


Рис. 1.11. Построение 3D-модели треугольника по его безосному чертежу:

a – заданный чертеж; b – нанесение осей координат на чертеж;
 v – координаты вершин треугольника; z – 3D-модель

- Лектору: на практических занятиях постройте 3D-модель треугольника по координатам (см. рис. 1.11б, в). Покажите нанесение осей, измерение и запись координат.

1.8. Построение чертежа по 3D-модели

Выше мы рассмотрели построение 3D-модели по ее координатам или чертежу. Теперь перейдем к задаче создания чертежа по уже построенной 3D-модели. Эта задача остается актуальной, поскольку чертежи по-прежнему необходимы для решения практических инженерных и производственных задач (см. раздел 1.4.1).

1.8.1. Методы 2D- и 3D-построения чертежа

В нашем курсе рассмотрим методы построения проекций в Платформе nanoCAD как основы чертежа. Оформление чертежа, простановка размеров, построение разрезов и сечений, соблюдение государственных стандартов рассмотрены в последующих курсах инженерной и компьютерной графики [4].

Объектом, на примере которого рассмотрим построение проекций, будет композиция из трех геометрических примитивов: параллелепипеда, конуса, полусферы. Создание 3D-модели композиции – см. раздел 2.15. Создание требует применения объектной привязки, ПСК, построения разреза как примера редактирования, применения цвета и источников света.

Существуют два подхода к построению чертежа по трехмерной модели объекта: 2D- и 3D-методы. 2D-метод подразумевает, что компьютерные 3D-построения не используются. 3D-модель существует только в воображении конструктора, который самостоятельно создает ее проекции. Построения выполняются либо вручную – с помощью циркуля и линейки на бумаге, либо на компьютере – путем черчения отрезков и окружностей. Пример применения 2D-метода рассмотрен в разделе 2.16.

○ Лектору: покажите раздел 2.16 «2D-метод построения чертежа».

Метод 3D – это современный автоматизированный метод. Проекция создается в автоматическом режиме на основе предварительно созданной 3D-модели. Задача конструктора – назначать необходимые проекции и компоновать из них чертеж, соблюдая требования, предъявляемые к содержанию чертежа (см. раздел 1.4.2).

1.8.2. Автоматизированный вариант построения чертежа

Основу чертежа составляют отображения модели на плоскость, т. е. проекции видов, разрезов, сечений и др. В Платформе nanoCAD, как во всех современных САПР, построение элементов чертежа предусмотрено в автоматическом режиме по предварительно созданной 3D-модели. Построения выполняются командами, расположенными на вкладке «3D-инструменты» в группе «2D-виды».

Общим для команд рассматриваемой группы является разрежение создаваемых изображений в плоскости ПСК и возможность построения неограниченного последовательного ряда ортогональных проекций (рис. 1.12).

Команда «2D Вид»  создает проекцию 3D-модели на плоскость ПСК и позволяет на основе этой проекции построить последующие ортогональные, в том числе аксонометрические проекции (изометрии). С этой команды начинается построение чертежа, а именно горизонтальной проекции модели. Для ее выполнения следует указать модель и перемещением курсора указать место проекции на плоскости ПСК. Продолжив перемещение курсора, можно построить набор ортогональных проекций.

Команда «2D Проекционный вид»  строит проекцию модели на основе предварительно созданной проекции. Необходимо указать созданную проекцию и положение новой проекции. Например, построение профильной проекции по созданной фронтальной проекции. Последующее перемещение курсора позволяет создать ряд проекций на основе новой.

Команда «2D разрез»  строит разрез модели плоскостью, перпендикулярной предварительно построенной проекции. Достаточно на проекции указать две точки проецирующей секущей плоскости и положение создаваемого сечения.

Команда «Секущая плоскость»  строит разрез 3D-модели произвольной плоскостью. На 3D-модели следует указать три точки плоскости, затем на плоскости XY ПСК указать положение изображения, являющегося разрезом указанной плоскостью.

На рис. 1.12 (рис. 1.12а) показан пример построения проекций командами «2D Вид» и «2D Проекционный вид». Первоначально командой «2D Вид» построена проекция вида сверху (стрелка 1, рис. 1.12б), по ней (стрелка 2) построена проекция вида спереди. Далее командой «2D Проекционный вид» построены проекция вида слева (стрелка 3) и две изометрии (стрелки 4 и 5). Построения в рассматриваемом примере подробно приведены в разделе 2.17.

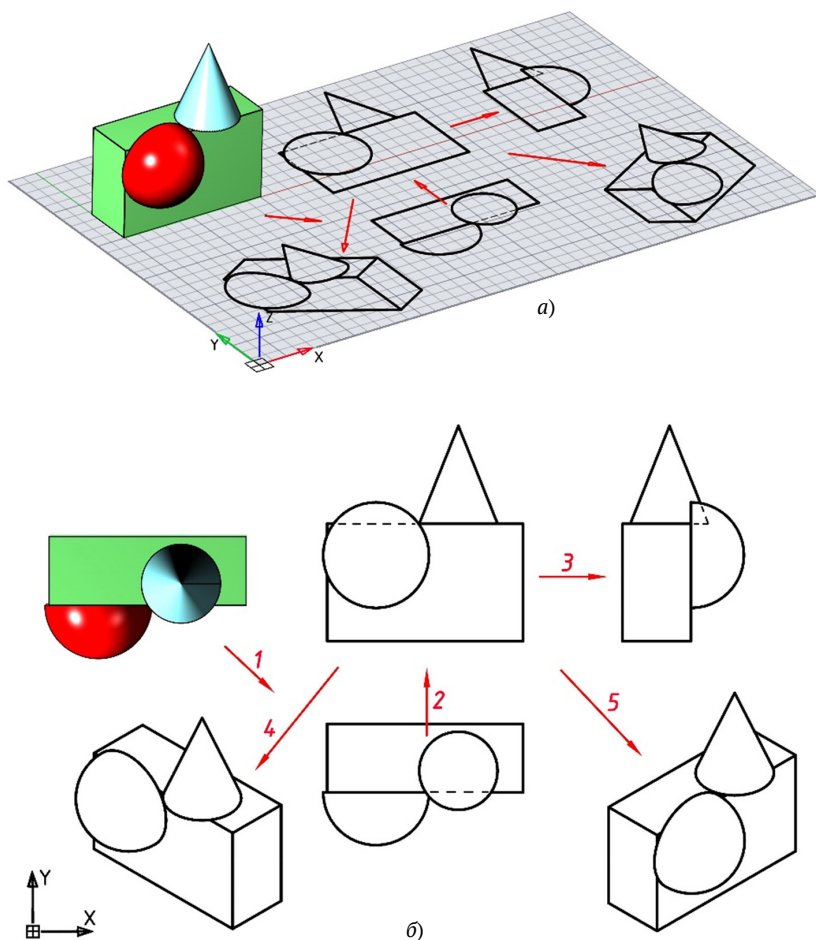


Рис. 1.12. Построение проекций модели как 2D-видов:

а – размещение проекций в плоскости ПСК; б – последовательность построений

Команды группы «2D-виды» воздействуют на объекты типа «Солид», «Поверхность» или «Область». Например, можно построить чертеж треугольника, если его 3D-модель (см. рис. 1.11з) создана как плоский объект «Область». Будут по-

лучены проекции этого треугольника (см. рис. 1.11а). «2D-виды» можно применить и к линейным пространственным объектам (отрезкам, окружностям, сплайнам и др.), если их предварительно преобразовать в поверхности или солиды (см. раздел 5.2.3).

Кроме команд группы «2D-виды» для построения проекций линейных пространственных объектов применяется команда «Конвертирование в 2D», которая обнуляет Z-координаты точек линий и строит проекции линий на плоскость XY текущей ПСК (см. раздел 5.2.3).

○ Лектору:

- покажите в Ленте группу команд «2D-виды»;
- откройте файл «Композиция призма сфера конус.dwg» (см. раздел 2.15). Поясните построение композиции;
- покажите раздел 2.17 с примером построения проекций композиции;
- для композиции покажите построения проекции командами «2D-виды».

1.9. Аксонометрия

Рассмотренные выше чертежи в ортогональных проекциях сравнительно просты в построении и имеют высокие метрические свойства, т. е. по ним легко измерить размеры и проставить их на чертеже. Существенный недостаток ортогональных чертежей – низкая наглядность и условность построения, связанная с разворотом и совмещением плоскостей проекций. Для понимания формы требуется анализировать минимум две проекции. Низкая наглядность обусловлена также тем, что для упрощения чертежа модель при проецировании располагают так, чтобы как можно больше ее граней отобразились в прямые линии, а прямые – отобразились в точки. Например, параллелепипед отображается набором прямоугольников, конус – треугольником и окружностью.

Аксонометрия (название переводится с греч. как «измерение по осям») – параллельная, проекция, создаваемая с целью придания чертежу наглядности. При правильно построенной аксонометрии достаточно одного взгляда на изображение для понимания формы модели. Для этого положение модели и направление ее проецирования назначают так, чтобы грани не вырождались в прямые линии, а прямые линии не вырождались в точки. То есть наглядность – главное преимущество аксонометрических чертежей и изображений перед ортогональными чертежами.

Ответим на непростой вопрос: чем отличается вид модели от проекции модели. Вид – это 3D-изображение реального или виртуального объекта. Проекция – это отображение 3D-объекта на плоскость. Наглядное изображение модели на экране компьютера является аксонометрической проекцией виртуальной 3D-модели на плоскость экрана.

Рассмотрим основные термины аксонометрии. Если для получения аксонометрического изображения объект проецируют перпендикулярно плоскости чертежа, то аксонометрия называется ортогональной, иначе – косоугольной.

Основное свойство чертежа, в том числе аксонометрического, – обратимость (см. выше, раздел 1.4.2). Для аксонометрии обратимость – это возможность

по одному изображению выполнить измерения модели, определить координаты любой точки изображенной модели. Для придания аксонометрическому изображению обратимости модель помещают в декартову систему координат и проецируют вместе с этими осями. Оси, а также масштабные отрезки на них должны быть отображены на аксонометрическом чертеже (либо подразумеваться по умолчанию).

Аксонометрические проекции подразделяют на изометрию, диметрию и триметрию. Чтобы понять различие между ними, рассмотрим аксонометрические проекции куба. В зависимости от положения куба перед плоскостью чертежа и направления проецирования возможно бесконечное количество проекций. Если в проекции все стороны куба отображены как равные отрезки (рис. 1.13а), то изображение называют изометрией (греч. «изо» – «равно», т. е. равные измерения). Если на изображении равны между собой длины двух сторон (третья сторона другая, рис. 1.13б, в), то проекцию называют диметрией (греч. «ди» – два), если различны все стороны проекции куба – это триметрия (рис. 1.13г, д).

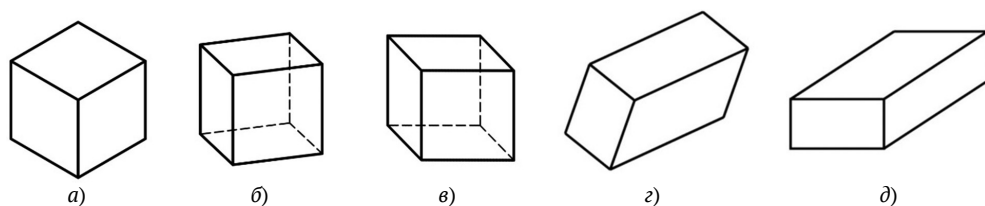


Рис. 1.13. Варианты аксонометрических проекций (на примере куба):

а – ортогональная изометрия; б – ортогональная диметрия;

в – косоугольная фронтальная диметрия;

г, д – другие косоугольные проекции – триметрии

В аксонометрии известна теорема Польке–Шварца, которая доказывает возможность построения всевозможных аксонометрических проекций. Например, для куба, наряду с наглядными проекциями (рис. 1.13а–в), могут быть получены «странные» аксонометрические проекции (рис. 1.13в, г), не обладающие наглядностью.

Недостатки аксонометрических проекций и чертежей – сложность построения и сложность определения размеров модели по этому чертежу. До появления компьютерной графики аксонометрические проекции строили вручную, т. е. карандашом на бумаге. Их построение было значительно более сложным, чем ортогональных чертежей. Поэтому аксонометрические чертежи применяли главным образом как дополнение к ортогональным чертежам с целью повышения их наглядности и в качестве иллюстраций. Чаще всего применялась изометрия – как аксонометрия, наиболее простая в построении.

В Платформе nanoCAD (и всех современных САПР) создание различных аксонометрических видов и проекций в значительной мере происходит в автоматическом режиме. Вращая модель вместе с пиктограммой осей координат, мы видим бесконечное множество обратимых аксонометрических проекций виртуальной модели, автоматически построенных в реальном времени на экране компьютера.

Наряду с «аксонометрической проекцией» в Платформе nanoCAD применяется термин «аксонометрический вид» – это изображение 3D-объекта как мы его видим, в том числе на экране компьютера. В зависимости от положения объекта вид может быть изометрией, диметрией, триметрией, но в отличие от проекций вид может быть только ортогональным. То есть возможен вид как на рис. 1.13а, б, но невозможен как на рис. 1.13в–д.

Особенности и терминология автоматического построения ортогональной изометрии рассмотрены в разделе 2.18. В нашем курсе предусмотрено также знакомство с «ручной» техникой построения аксонометрии на простых примерах – см. раздел 2.19.

○ Лектору:

- откройте раздел 2.18 и поясните названия изометрических проекций (рис. 2.12);
- постройте параллелепипед и покажите его изометрические виды и проекции как 2D-виды.

Вопросы для самоконтроля по главе 1

1. Дайте определения: геометрическая модель, инженерная компьютерная графика, 2D- и 3D-методы геометрического моделирования, проекция, чертеж, nanoCAD.
2. В чем отличие 2D- и 3D-методов построения чертежа?
3. Модель эпюра Монжа. Что такое проекционная связь на чертеже?
4. Что такое обратимость чертежа? Условие обратимости чертежа. Требования к чертежу как модели объекта.
5. Осный и безосный чертеж. Определение. Назначение.
6. Что такое шаблон (прототип) файла? Его назначение и содержание. Как создать новый файл на основе шаблона?
7. Твердотельные модели, их свойства. Твердотельные примитивы, их назначение.
8. Как по 3D-модели определить координаты точки, длину отрезка и площадь плоского треугольника?
9. Система координат Монжа и САПР. Их особенности. Определение мировой и пользовательской системы координат nanoCAD.
10. Как изменится положение объекта, если координаты в системе Монжа без корректировки воспроизвести в системе МСК nanoCAD?
11. Что такое объектная привязка? Как ей пользоваться? Задача Аполлония, ее решение методами объектной привязки.
12. В чем заключается автоматизированный вариант построения чертежа по 3D-модели?
13. В чем сходство и отличие вида 3D-модели на экране от ее проекции?
14. Команды и методы определения геометрических характеристик моделей.
15. Что такое аксонометрия? Ее назначение. Виды аксонометрии. Условие обратимости аксонометрического чертежа.

ГЛАВА 2

Приложение к лекции 1: Методы 2D- и 3D-геометрического моделирования

В этой главе приведены материалы, дополняющие лекцию 1, алгоритмы построения моделей, в том числе моделей для мультимедийной лекции 1, а также информация по работе в Платформе nanoCAD применительно к задачам нашего курса.

2.1. Установка программы nanoCAD

После регистрации на сайте компании «Нанософт» (см. лекцию 1, раздел 1.2) пользователю предоставляется возможность установить бесплатную студенческую версию Платформы nanoCAD. На нее выдается лицензия на один год с возможностью продления. Для установки учебной версии перейдите на сайт фирмы и следуйте приведенным инструкциям на <https://academy.nanocad.ru/education#video>.



В результате установки на рабочем столе появятся три ярлыка: . Слева – ярлык базовой платформы, средний – модуль «Механика», справа – модуль «СПДС» (Система проектной документации для строительства). Базовая платформа содержит необходимые средства для 2D-и 3D-моделирования и является достаточной для нашего курса. Модули «Механика» и «СПДС» дополняют платформу средствами построения моделей и чертежей; они понадобятся в следующих курсах инженерной графики и компьютерной графики.

2.2. Создание и сохранение файла

Все задания и задачи нашего курса выполняются в компьютерном варианте. Поэтому прежде всего следует освоить работу с файлами: открыть, сохранить, закрыть.

- ◆ На рабочем столе найдите ярлык Платформы nanoCAD  и выполните по нему двойной клик ЛКМ (левой кнопкой мыши) – произойдет загрузка базовой Платформы nanoCAD. Будет создан и открыт новый файл.
- ◆ В левом верхнем углу экрана укажите кнопку «nanoCAD»  – открылся доступ к командам управления файлами.
- ◆ В открывшемся меню укажите «Сохранить»  – открылось окно «Сохранить документ» \ В окне найдите или создайте рабочую папку для ваших файлов \ задайте файлу имя, например Иванов \ «Сохранить» – файл сохранен с именем «Иванов .dwg».

В процессе работы делайте  промежуточные, а по окончании работы – завершающее сохранение файла.

Для завершения работы:

- ◆ укажите кнопку  \ в меню укажите нижнюю кнопку «Закрыть» .
- ◆ откройте папку ваших файлов и найдите в ней сохраненный файл, например «Иванов .dwg».

В нашем курсе новый файл будем создавать на основе предварительно созданного шаблона. О том, как работать с шаблоном, см. раздел 2.20.

2.3. Интерфейс Платформы nanoCAD

Интерфейс – набор графических или текстовых средств для общения с программой. Рассмотрим интерфейс и настройки Платформы nanoCAD, необходимые для построений в нашем курсе. Далее, по мере изложения курса информация по интерфейсу будет дополняться.

2.3.1. Элементы интерфейса

На экране видим интерфейс Платформы nanoCAD. После настройки цветовой гаммы (см. ниже, раздел 2.3.3) интерфейс имеет вид, показанный на рис. 2.1. Элементы интерфейса обозначены на рисунке и соответствуют следующим позициям.

1. *Лента* – область интерфейса, в которой сгруппированы кнопки управления основными командами построения, редактирования и настроек.
2. *Кнопка*  – кнопка переключения с Ленты на меню классического интерфейса; для возврата к Ленте нажмите эту же кнопку повторно. Так как в курсе мы будем использовать команды в Ленте, ссылки на нее будут подразумеваться по умолчанию и отдельно указываться не будут.
3. *Графическая область* – основная часть экрана, предназначенная для выполнения построений моделей и чертежей.
4. *Командная строка* – область, через которую осуществляется диалог пользователя с программой: вводятся команды, отображаются подсказки и сообщения nanoCAD.

5. *Строка состояния* – область интерфейса, содержащая кнопки настройки объектов и режимов работы.

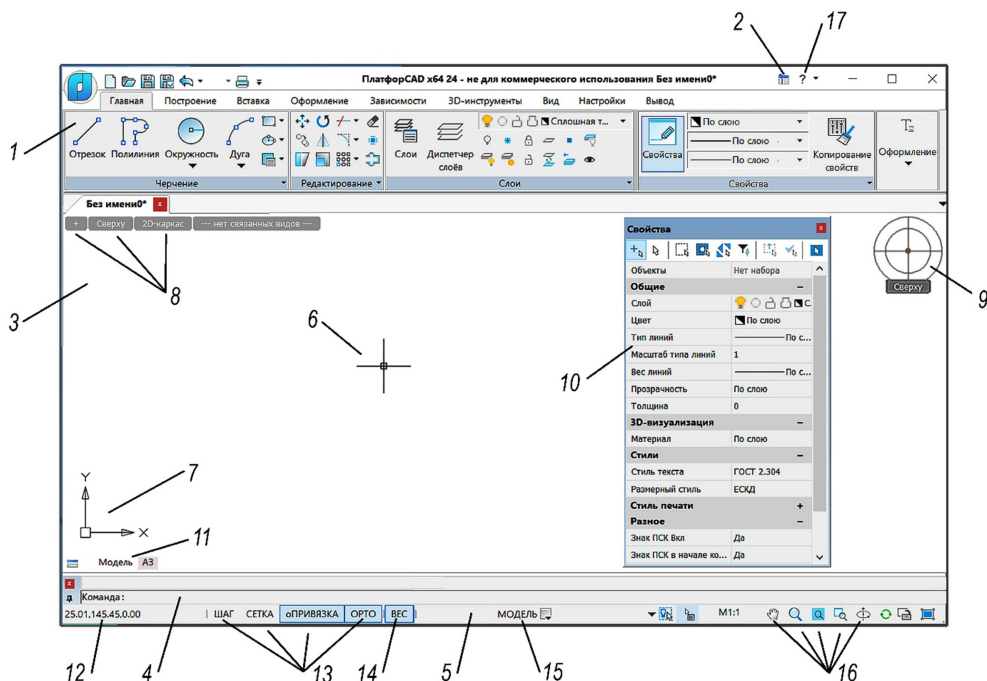


Рис. 2.1. Интерфейс Платформы папоCAD

В графической области расположены:

- 6) *курсор*, управляемый перемещением мыши;
- 7) *пиктограмма осей системы координат* – графическое обозначение, отображающее ориентацию осей координат в пространстве Модели;
- 8) кнопки управления видами и визуальными стилями;
- 9) *локатор* – элемент интерфейса, предназначенный для управления видами модели;
- 10) функциональная панель «Свойства» – используется для просмотра и изменения параметров выбранных объектов. На экране также могут быть размещены другие функциональные панели, необходимые для работы с моделью или чертежом;
- 11) панель закладок для перехода между пространствами «Модель–Лист».

Некоторые кнопки строки состояния, необходимые в нашем курсе:

- 12) координаты курсора – отображают текущие координаты указателя мыши в пространстве Модели;
- 13) кнопки режимов построений: «Шаг», «Сетка», «Объектная привязка», «Ортогональные построения»;

- 14) кнопка «Вес» – включение\отключение толщины линий объектов, построенных в графической области;
- 15) кнопка переключения пространства «Модель\Лист» – используется при работе с видовыми экранами в пространстве Листа;
- 16) кнопки регулировки размера и положения объектов на экране: «Навигация», «Панорамирование», «Показать все», «Рамка», «Зависимая орбита»;
- 17) кнопка справочной системы – открывает справку по работе с nanoCAD.

2.3.2. Настройка строки состояния

Кнопки строки состояния (рис. 2.1, поз. 5), необходимые для работы, могут не умещаться в строке и по этой причине отсутствовать. Если необходимая кнопка в строке состояния не найдена, следует выполнить клик ПКМ по свободному участку строки. Откроется окно «Конфигурация строки состояния». Для освобождения места в строке следует отключить часть кнопок, например «3D ОПРИВЯЗКА», «ИЗО», «ПАРАМ-РЕЖИМ», «ДИН-ВВОД», «Выбор объектов на заблокированных слоях», «Блокировка элементов интерфейса».

- ◆ Проверьте, что кнопки 12–16 выведены в строку состояния. Иначе скорректируйте содержание этой строки, убрав часть кнопок.

2.3.3. Настройка цветовой гаммы интерфейса

По умолчанию в Платформе nanoCAD установлен темный визуальный стиль интерфейса и черный цвет экрана. Рекомендуем выполнить настройки интерфейса: установить белый цвет экрана и светлые тона Ленты (см. рис. 1.1). Для этого нужно пройти по пути:

- ◆ Настройки \ Настройки программы  – открылось диалоговое окно «Настройки» \ укажите Цвет \ Фон в пространстве Модели \ двойной клик ЛКМ по строке \ Укажите Белый (255, 255, 255) \ ОК \ Фон в пространстве листа \ Белый \ ОК \ Визуальный стиль интерфейса \ Айсберг \ Применить изменения \ ОК.

2.3.4. Справочная система Платформы nanoCAD

Рекомендуем при изучении команд и содержания диалоговых окон, особенно при первом знакомстве с ними, обращаться к справочной системе Платформы nanoCAD. Доступ к справочной системе осуществляется указанием кнопок  и  (см. рис. 2.1, поз. 17).

По кнопке  открывается окно «Справка nanoCAD», содержащее описание интерфейса, команд и алгоритмов их применения.

При указании стрелки (кнопки)  открывается выпадающее меню с дополнительными разделами справочной службы. Рекомендуем изучить онлайн-справку , раздел «Пользовательский интерфейс nanoCAD». Здесь в наглядной форме представлены описания классического и ленточного интерфейса, а также множество настроек и дополнительных возможностей работы в программе.

По кнопке  перейдите на сайт компании «Нанософт» – разработчика программы. Здесь размещена информация о модулях, многочисленных приложениях и новых разработках nanoCAD, а также сведения о форумах, конкурсах и учебных материалах, доступных для пользователей.

Указав кнопку , вы увидите информацию о программе, загруженной на вашем компьютере: версию, вид, статус и срок действия лицензии.

Например, при изучении интерфейса обратитесь к справочной системе:

- ◆  – открылось окно справки \ Содержание \ Платформа nanoCAD \ Пользовательский интерфейс nanoCAD – стали доступны разделы, в которых рассмотрены элементы интерфейса, например «Лента», «Графическая область» и др.
- ◆ Укажите раздел «Лента» и изучите содержание и назначение вкладок Ленты, настройку Ленты.

2.4. Свойства объектов nanoCAD

Общими свойствами всех объектов являются цвет, тип и толщина линии, которыми объект отображен на экране, а также слой, на котором построен объект.

2.4.1. Характеристики свойств объектов

Цвет в 3D-построениях задается из условий наглядности и дизайна. Линии (отрезки, окружности и др.) могут иметь различный цвет, а объемные тела – дополнительно иметь разный цвет граней и ребер.

Тип линий: это может быть сплошная линия, штриховая, штрихпунктирная и др.

Вес линий (толщина) – служит для повышения наглядности при работе с 3D-объектами и во время решения различных задач. Например, тонкие линии используются для вспомогательных построений, а толстые – для отображения итоговых элементов. Вес линии может также назначаться контурам объемных тел.

При построении чертежей тип и толщина линий задают согласно требованиям ГОСТ (государственных стандартов).

Придание толщины линиям является необходимым требованием к оформлению чертежа и одним из условий наглядности при отображении 3D-моделей. Однако отображение толщины линий на экране может осложнять процесс построения. Поэтому толщину (вес) можно временно отключать. Включение-отключение выполняется указанием кнопки  в строке состояния (см. рис. 2.1, поз. 14).

- ◆ Найдите в строке состояния кнопку , если она отсутствует, то добавьте эту кнопку в строку состояния (см. выше раздел 2.3.2).

Слой – это группа объектов, имеющих общее назначение или свойства. Например, в нашем курсе можно создать слои с именами: «Решение», «Разметка», «Линия пересечения» и др. Объекты, включенные в слой, могут иметь общие

свойства, которые задают в настройках слоя. Такие свойства называют «По слою». При необходимости отдельным объектам можно назначить индивидуальные свойства, отличающиеся от установленных для слоя в целом.

Подробные сведения о свойствах объектов приведены в справочной системе:

- ◆ Окройте справку  \ Содержание \ Раздел «Свойства объектов» \ Откройте подразделы «Выбор цвета», «Слой», «Типы линий» и др.

2.4.2. Задание свойств из Ленты

Выбор и редактирование свойств объектов осуществляется с помощью команд группы «Свойства», расположенной на Ленте:

- ◆ Главная \ Свойства.

В открывшейся группе находятся три раскрывающихся списка. Сверху вниз – это списки свойств: Цвет, Тип линии, Вес. При создании объект принимает свойства, приведенные в этих списках. Чтобы узнать свойства уже созданного объекта, достаточно его выделить – текущие значения отобразятся в списках. Для изменения свойств объекта можно открыть соответствующий список и выбрать нужное значение.

По умолчанию в новом файле в списках установлены значения «По слою». Это означает, что свойства объекта определяются свойствами слоя, на котором объект расположен.

2.4.3. Функциональная панель «Свойства»

Оптимальный вариант задания и редактирования свойств – использовать панель «Свойства» (см. рис. 2.1, поз. 10). При создании нового файла панель «Свойства» автоматически отображается на экране. Панель можно перемещать (буксировать курсором) по экрану, регулировать размеры. Если панель отсутствует, ее можно восстановить, выполнив:

- ◆ Главная \ Свойства \ Укажите кнопку .

Второй вариант открытия окна – через контекстное меню.

- ◆ Щелкните ПКМ по свободной области экрана – откроется контекстное меню.
- ◆ В нижней части контекстного меню укажите строку «Свойства» – возникла панель «Свойства».

Указав на экране объект, в панели «Свойства» увидим его свойства, присвоенные на момент создания, доступные для редактирования.

2.4.4. Управление слоями

Управление слоями выполняется на вкладке «Главная» в группе «Слой». В верхней строке вкладки видим название слоя, активного в данный момент. Такой слой называют «текущим». Вновь создаваемый объект будет помещен на этот слой. Можно на строке с именем слоя указать расположенную справа кнопку ▼ и в раскрывшемся списке перейти на другой предварительно созданный слой, который станет «текущим».

Указав объект, увидим в строке слой, на который был помещен объект при его создании.

Если указать объект и в строке выбрать другой слой, объект переместим на выбранный слой.

Слой может быть выключен или заморожен. Объекты такого слоя исчезают с экрана и восстанавливаются при отключении этих режимов. Основное различие между этими режимами проявляется при работе с видовыми экранами на Листе: при выключении объектов слоя исчезают со всех экранов, при замораживании – только с указанных экранов.

Для создания новых слоев выполните:

- ◆ Главная \ Слои  или  \ В открывшемся окне укажите слева вверху кнопку  \ В строке «Слой 1» задайте имя нового слоя.

2.5. Пространство Модели и пространство Листа

В Платформе nanoCAD предусмотрено два пространства построений.

Пространство Модели – трехмерное пространство, в котором будем выполнять построения 3D-моделей. Это пространство активно при создании нового файла по умолчанию. Признаком пространства Модели является пиктограмма осей координат, которая в новом файле имеет вид  (см. рис. 1.1, поз. 7).

Пространство Листа – условная плоскость, расположенная между наблюдателем и пространством модели. Его образно можно рассматривать как лист бумаги, закрывающий пространство Модели. На листе можно выполнять 2D-построения, оформление чертежа и подготовку к печати. Признаком активного пространства Листа является пиктограмма в виде треугольника .

- ◆ Для перехода из пространства Модели на Лист укажите вкладку А3 (см. рис. 2.1, поз. 11).
- ◆ Для обратного перехода укажите вкладку «Модель» в той же панели.

Видовой экран – это своего рода окно в Листе, через которое можно перейти в пространство Модели. Экран ограничен рамкой. Переход с Листа в пространство Модели можно выполнить через видовой экран, сделав двойной клик ЛКМ по области экрана. Чтобы вернуться на Лист – двойной клик вне экрана.

В нашем курсе пространство Листа применяется с несколькими видовыми экранами для одновременного отображения модели в различных видах и различных ПСК. В шаблоне (см. раздел 2.20) подготовлены конфигурации из трех и четырех прямоугольных видовых экранов (рис. 2.14). Подробнее о видовых экранах см. раздел 2.20.2.

2.6. Система координат в 3D-построениях

Системой координат в nanoCAD является декартова правая тройка векторов X , Y , Z . От положения объекта в системе координат зависит алгоритм построения модели. В процессе построения системы координат преобразуют, задавая их оптимальное положение относительно модели.

2.6.1. Мировая, пользовательская и именованная системы координат

В nanoCAD (и в других САПР) введено понятие мировой системы координат (сокращенно МСК), под которой понимается некоторая условная система координат, принятая в качестве начальной системы отсчета. При построении на плоскости, например выполнении чертежа, под МСК понимают систему координат, у которой плоскость XY совмещена с плоскостью чертежа, а начало находится в левом нижнем углу формата чертежа.

При трехмерных построениях МСК – это система координат, у которой плоскость XY принимается в качестве горизонтальной, ось X направлена слева направо, ось Y – от наблюдателя вперед, а за начало координат принимается точка модели, удобная для расчетов и задания размеров. Образом МСК может быть плоскость стола, на котором расположена деталь, плоскость на уровне земли для зданий.

В процессе построения система МСК может оказаться не оптимальной, и ее потребуется переопределить. Это может быть параллельный перенос плоскости и начала координат в новую точку, поворот плоскости построений относительно пространственной оси, задание плоскости по трем точкам модели и др. Система координат, созданная пользователем в процессе построений, называется «пользовательская система координат». Принято сокращенное обозначение ПСК. Систему координат, активную в данный момент, называют «текущая система координат».

Задание ПСК осуществляется указанием кнопок и именованных ПСК, расположенных в группе «Координаты». Откройте группу:

◆ Вид \ Координаты.

В верхней части группы расположен раскрывающийся список ортогональных и именованных ПСК. «Ортогональные ПСК» – это системы координат, задаваемые по осям МСК. Например, если предварительно установить МСК, затем задать в указанном списке систему с именем «Слева», будет установлена ПСК, у которой оси X, Y совпадают с осями Z, Y системы МСК. Задав «Ортогональную ПСК» с именем «Спереди», установим ПСК по осям Z, X системы МСК и т. д.

Кнопки группы «Координаты» позволяют задать новую пользовательскую систему координат (ПСК) относительно текущей ПСК, а также – относительно объекта или вида.

Кнопка  переводит ввод команды ПСК в командную строку и открывает доступ ко всем опциям этой команды. Остальные кнопки группы приводят к выполнению отдельных опций команды ПСК.

Кнопка  устанавливает МСК.

Опция «Начало»  переносит начало координат в точку, заданную координатами в текущей ПСК или указанную с объектной привязкой.

Опция «3 точки»  задает ПСК по координатам трех точек, первая из которых определяет начало координат, вторая – направление оси X , третья – направление оси Y . Точки задаются координатами в ПСК или объектными привязками.

Опция «Направление оси Z»  задает ПСК двумя точками, первая точка определяет начало координат, вторая – направление оси Z. Точки задаются координатами в ПСК или объектными привязками. При этом ось X автоматически устанавливается параллельно плоскости XY системы МСК.

Кнопки , ,  реализуют опции «X», «Y», «Z» и определяют поворот ПСК вокруг оси ПСК, указанной на кнопке.

Кнопка  – опция «Вид» устанавливает ПСК параллельно экрану, при этом ось X автоматически устанавливается горизонтально, начало координат сохраняется в начале прежней ПСК.

Кнопка  – опция «Объект» устанавливает ПСК на указанный объект. Расположение ПСК на объекте зависит от его типа. При указании 3D-объекта ПСК устанавливается на его грань, указанную курсором. При этом ось X ПСК устанавливается параллельно ребру грани или вдоль ребра, которое пересекли курсором при наведении его на эту грань.

Созданную ПСК можно сохранить как именованную и восстанавливать ее на любом этапе построений или передавать между видовыми экранами. Сохранить можно ПСК, не являющуюся ортогональной. Для создания именованной ПСК:

- ◆ в группе Лента \ Вид \ Координаты раскройте список ПСК и укажите нижнюю строку списка – открылось диалоговое окно ПСК;
- ◆ укажите закладку «Именованные ПСК», верхнюю строку «Без имени» и введите новое имя.

Кнопка  открывает диалоговое окно ПСК, в котором можно выполнить выбор именованных и ортогональных ПСК, а также настройку знака ПСК.

При работе с видовыми экранами в каждом экране может быть установлена «своя» ПСК. Этот режим задан по умолчанию и позволяет в каждом экране сохранять или переопределять ПСК независимо от ее положения в других видовых экранах. В диалоговом окне ПСК предусмотрен режим, поддерживающий единую ПСК во всех видовых экранах.

- ◆ В справочной системе в разделе «Пользовательская система координат» изучите дополнительные возможности команды ПСК.

2.6.2. Пиктограммы осей координат – знак ПСК

Пиктограмма осей координат (рис. 2.2), ее также называют «знак ПСК», предназначена для наглядного отображения текущей системы координат: направления осей, положения точки начала координат, информации о МСК или ПСК, о пространстве Модели или Листа.

Если пиктограмма содержит оси координат, то в видовом экране активно пространство Модели (рис. 2.2а–ж). Пиктограмма в виде треугольника означает, что построения выполняются на Листе (рис. 2.2з, и).

Отсутствие в пиктограмме оси Z означает, что в видовом экране установлен вид сверху (рис. 2.2а, б, з) или снизу (рис. 2.2в), в которых эта ось вырождена в точку. Дополнительную информацию несет цвет пиктограммы. Черно-бе-

лый цвет пиктограммы означает, что активна МСК. Например, пиктограмма (рис. 2.2а, б) показывает вид сверху или снизу (рис. 2.2в) в МСК. Цветные пиктограммы отображают ПСК, например вид сверху в ПСК (рис. 2.2г), т. е. направление вида вдоль ее оси Z .

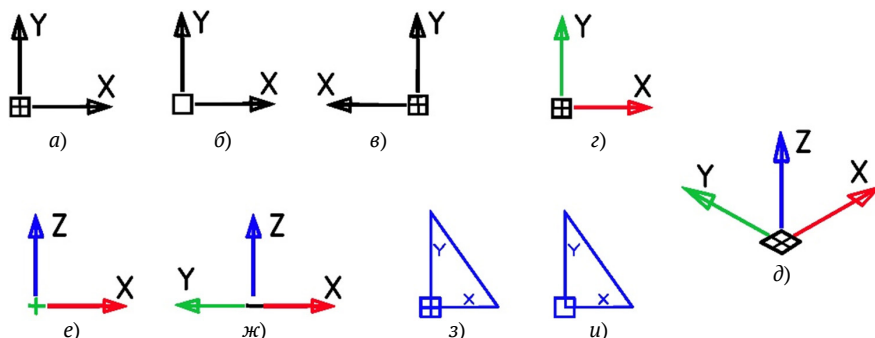


Рис. 2.2. Пиктограммы осей системы координат

«Крестик» на пересечении осей X , Y показывает, что пиктограмма установлена в начале координат $0,0,0$. Иначе пиктограмма отражает только направление осей, но не начало координат. В этом случае пиктограмма смещена в левый нижний угол экрана (рис. 2.2б, и). Такой режим отображения возникает, если пиктограмма не умещается на экране или режим отображения начала координат отключен.

Цветная пиктограмма, содержащая все оси, показывает, что установлена аксонометрия, например приведена пиктограмма «Юго-Западная изометрия сверху» (рис. 2.2д).

Если в пиктограмме отсутствует одна из осей X или Y (рис. 2.2е) или эти оси расположены вдоль одной прямой (рис. 2.2ж), то плоскость построений XY перпендикулярна экрану, и построение указанием курсора мыши выполнять не следует. В этом случае необходимо изменить направление вида (взгляда) на экране, чтобы открылся вид на плоскость построений XY .

Пиктограммы (рис. 2.2з, и) показывают, что активно пространство Листа. Если пиктограмма имеет крестик, то она показывает положение начала координат ПСК (рис. 2.2з). Иначе пиктограмма расположена в левом нижнем углу экрана и лишь фиксирует, что активно пространство Листа.

2.6.3. Управление отображением пиктограммы ПСК

Управлять отображением пиктограммы можно командой «ЗнакПСК», которая позволяет делать пиктограмму видимой (Вкл) или скрытой (Откл), переносить пиктограмму в начало координат или помещать в левый нижний угол экрана (чтобы «не мешала» построениям). Команду «ЗнакПСК» можно вызвать по имени с командной строки – будут доступны все ее опции. Две опции – Вкл и Откл – можно выполнить, указав кнопку:

◆ Вид \ Координаты \

Рациональный вариант управления пиктограммой – через панель «Свойства»:

- ◆ клик ПКМ по свободной части экрана – открылось контекстное меню;
- ◆ укажите строку «Свойства» – открылась панель «Свойства»;
- ◆ перейдите в раздел «Разное».

В разделе «Разное» панели «Свойства» показаны текущие значения параметров пиктограммы. Указав на строке значение, можно в правой части строки по стрелке ▼ задать новое значение. Рекомендуем выполнить или проверить следующие настройки, указанные в панели «Свойства»: Знак ПСК включен (Да), Знак ПСК в начале координат (Да), ПСК в каждом видовом экране (Да), Имя ПСК (Мировая СК).

2.6.4. Пользовательская системы координат как плоскость 3D-построений

Плоскость XU системы ПСК называют плоскостью построений. Отметим ряд ее свойств:

- 1) курсор мыши при отсутствии объектной привязки перемещается в плоскости XU системы ПСК;
- 2) координаты курсора, отображаемые в строке состояния, приводятся в ПСК;
- 3) команда «Список» и панель «Свойства» выводят геометрические сведения об объекте, например координаты точек, углы наклона отрезка к плоскости относительно ПСК;
- 4) ортогональность, включаемая командой «ОРТО», действует в направлении осей ПСК.

2.7. Построение объектов в Платформе nanoCAD

В Платформе nanoCAD предусмотрено два варианта интерфейса: ленточный и классический. Переключение интерфейса выполняется указанием кнопки 2 (см. рис. 2.1). Мы будем работать в режиме ленточного интерфейса, применяемого в большинстве графических программ и приложений Windows. Классический интерфейс можно изучить по справочной системе nanoCAD (см. раздел 2.3.4).

В ленточном интерфейсе для построения любого объекта необходимо в Ленте указать кнопку команды, создающей этот объект, или вызвать команду по имени, введенному в командную строку. Затем во время выполнения команды в командную строку вводить варианты выполнения команды (опции команды) и параметры объекта. Параметрами могут быть размеры и координаты точек объекта.

2.7.1. Точка

Для построения точки как геометрического объекта в настройках файла необходимо предварительно задать маркер, которым будет обозначена точка.

Маркеры могут иметь различный вид, размер и цвет. Зададим маркер точки – «прямой крестик»:

- ◆ Построения \ Черчение \  \ Отображение точек – открылось окно «Отображение точек» \ Выберите и укажите необходимый маркер \ ОК.

Построение точки выполняется командой «Точка». Возможны три основных варианта выполнения этой и любой другой команды. Команду можно выполнить из Ленты, указав кнопки на вкладках «Главная» или «Построение» в группах «Черчение». Например, для задания точки с координатами $X = 60.5$, $Y = 50$, $Z = 40$:

- ◆ создайте новый файл на основе шаблона (о шаблоне – см. ниже, раздел 2.20);

- ◆ Главная \ Черчение \  \ Точка  \ переведите курсор в командную строку \ Укажите точку: 60.5,50,40 – заданная точка показана маркером

или:

- ◆ Построение \ Точка  \ переведите курсор в командную строку...

Можно ввести имя команды в командную строку:

- ◆ Точка \ Укажите точку: 60.5,50,40.

2.7.2. Отрезок прямой линии. Треугольник. 2D-объекты

Построение отрезка выполняется командой «Отрезок», для которой так же, как и для точки, возможно несколько вариантов выполнения. Например, построим отрезок, приведенный в лекции (см. рис. 1.1), выполнив команду из вкладки «Главная» группы «Черчение»:

- ◆ проверьте, что установлена МСК (о МСК см. выше, раздел 2.6.1);
- ◆ Главная \ Черчение \ Отрезок  \ Первая точка: 13,47,27 – точка A \ Укажите следующую точку: 76,10,64 – точка B \ построен отрезок AB ;
- ◆ укажите отрезок \ перейдите в панель «Свойства» \ Цвет: Красный \ Вес линий: 0.8.

Точка и отрезок прямой линии являются примерами 2D-объектов, расположенных в тех же разделах Ленты. Кроме отрезка, будем применять 2D-объекты: окружность, прямоугольник, многоугольник, эллипс, спираль, полилинию.

- ◆ Изучите раздел справочной системы (см. рис. 2.1, поз. 17) «Построение геометрических объектов», в котором рассмотрено назначение, параметры и применение команд 2D-построений.

Второй пример построения 2D-объекта – треугольник (см. рис. 1.7). Построим его из отрезков:

- ◆ Отрезок  \ Первая точка: 13,47,41 \ Укажите следующую точку: 50,10,18 \ Укажите следующую точку: 76,31,64 \ Замкнуть – построен контур треугольника.

Придадим модели наглядность. Для этого из контура создадим плоский объект «Область» и построим ее проекцию на Π_1 :

- ◆ установите визуальный стиль «Концептуальный» (см. рис. 2.1, поз. 8);
- ◆ Главная \ Черчение \ раскройте список вниз ▼ \ Область  \ укажите отрезки контура – треугольник закрашен;
- ◆ придайте треугольнику цвет. Для этого укажите область треугольника и выберите цвет в панели «Свойства»;
- ◆ создайте проекцию треугольника на Π_1 , придайте ей цвет (о построении проекций см. раздел 5.2.1).

Для построения треугольника и других многозвенных линий рационально применять полилинии. Это объекты, содержащих звенья, объединенные в единое целое. Команды находятся в тех же разделах Ленты. Команда «Полилиния»  строит плоский объект в ПСК и может содержать звенья в виде отрезков и дуг окружностей. Команда «3D-полилиния»  строит пространственную фигуру из отрезков. Например, рассмотренный выше треугольник можно построить как 3D-полилинию, задавая координаты в МСК.

Если к полилинии применить команду «Разбивка», то она распадается на звенья как самостоятельные объекты – отрезки или дуги окружностей.

2.7.3. Параллелепипед как 3D-объект прямого моделирования

Примером геометрического примитива, построенного в режиме прямого моделирования, является параллелепипед. Пусть он имеет размеры: длина 60, ширина 15, высота 40 мм. Для его построения:

- ◆ создайте новый файл на основе шаблона – см. раздел 2.22, п.п. 1 и 2;
- ◆ 3D-инструменты \ Режимы моделирования \ Прямое \ Прямое моделирование \ кнопка «Параллелепипед»  \ Первый угол: 20,30 \ Другой угол: @60,15 \ Высота: 40 – построен параллелепипед (см. рис. 1.8).

2.8. Управление изображением.

Визуальные стили

Управление изображением – это перемещение изображения по экрану, изменение размеров изображения, изменение вида. Отнесем к ним также изменение визуального стиля изображения.

Необходимо отличать управление изображением от редактирования объектов. При управлении изображением размеры и взаимное положение объектов не изменяются. То есть объекты приближаются или удаляются, их показывают с различных сторон и т. д. Редактирование приводит к изменению размеров самого объекта или его положения относительно других объектов (о редактировании см. ниже, раздел 2.11).

Рассмотрим управление изображением на примере параллелепипеда:

- ◆ откройте файл, в котором построен параллелепипед. Перейдите в пространство Модели (см. рис. 1.8а). Проверьте, что установлена МСК и визуальный стиль «Концептуальный».

2.8.1. Панорамирование и зуммирование

Панорамирование – перемещение изображения по экрану. Зуммирование – изменение размеров изображения. При этих операциях вид как направление взгляда на объект сохраняется. Управление выполняется командами, кнопки которых расположены в строке состояния (см. рис. 2.1, поз. 16), а также роликом мыши:

- ◆ для плавного перемещения изображения по экрану укажите кнопку «Панорамирование»  и перемещайте мышь;
- ◆ кнопка и команда «Показать все»  отображает все объекты, в частности параллелепипед, в границах экрана;
- ◆ «Рамка»  позволяет отобразить на весь экран часть объектов (часть параллелепипеда), охваченных прямоугольной рамкой, диагональные углы которой следует указать курсором;
- ◆ укажите кнопку «Навигация» (зуммирование)  \ Enter \ зажмите ЛКМ и перемещайте курсор по диагонали экрана – происходит плавная регулировка размеров изображения.

Использование колеса мыши также позволяет панорамировать и зуммировать, но дискретно, рывками, обусловленными механизмом колеса (ролика):

- ◆ прижмите колесо и перемещайте мышь – происходит панорамирование;
- ◆ вращайте колесо – происходит зуммирование.

2.8.2. Виды ПСК и виды МСК

В nanoCAD название вида присвоено в зависимости от его соответствия направлению осей декартовой системы координат. Например, вид спереди – это вид от начала координат вдоль оси Y . Вид сверху – вид с конца оси Z в ее начало. Вид слева – из начала вдоль оси X и т. д. Применяются изометрические виды, также задаваемые по отношению к осям.

Предусмотрены две разновидности видов, которые назовем «Виды ПСК» и «Виды МСК».

Виды ПСК

Виды ПСК связаны с осями ПСК. Если переопределить ПСК, то в соответствии с новым положением осей изменится и название вида, хотя изображение на экране останется прежним. Эти виды устанавливаются командами, управляемыми кнопкой, расположенной в левом верхнем углу видового экрана (см. рис. 2.1. поз. 8, вторая слева в ряду кнопок). При работе на Листе кнопки видов расположены в том же углу каждого видового экрана.

- ◆ В левом верхнем углу графической области экрана найдите кнопку 8 управления видами – открылся список видов \ укажите и раскройте вниз список видов.
- ◆ Установите вид сверху – пиктограмма осей приняла положение . В пиктограмме нет оси Z , при этом вид направлен вдоль нее, т. е. сверху, что соответствует названию вида.

- ◆ Установите вид спереди – пиктограмма , в ней нет оси Y , т. е. вид направлен вдоль этой оси, т. е. это вид спереди.
- ◆ Изометрические виды \ «ЮЗ изометрия сверху» – пиктограмма осей приняла вид . О направлении изометрических видов см. раздел 2.18.

Проведем эксперимент, поясняющий свойство видов ПСК:

- ◆ установите МСК и по кнопке 8 задайте вид спереди – ось Y и вид (взгляд) стали направленными на плоскость Π_2 ;
- ◆ поверните систему координат вокруг оси X на 90° (Вид \ Координаты \  \ 90°) – ось Y стала направленной вверх, на наблюдателя направлена ось Z .

Изображение осталось прежним: вид направлен на Π_2 – но в списке видов по кнопке 8 он уже назван видом сверху, поскольку направлен с конца оси Z к ее началу. То есть при одном и том же изображении вид может называться различно, в зависимости от направления осей ПСК. Поэтому такие виды и названы «виды ПСК».

Задать вид ПСК можно Локатором (см. рис. 2.1, поз. 9). При указании зон локатора происходит перестроение вида ПСК. Красная точка локатора указывает точку наблюдения, от которой взгляд направлен в центр Локатора. Действует и обратная связь – при изменении на экране вида ПСК, выполняемом по кнопке 8, происходит соответствующее перемещение красной точки Локатора. Кнопка «+» поз. 8 включает \ отключает Локатор.

Указанная особенность видов ПСК, заключающаяся в том, что при одном и том же изображении на экране вид называется по-разному, может вызывать затруднения в их применении.

Виды МСК (ортогональные виды)

Другой способ задания направления взгляда в nanoCAD – это использование ортогональных видов, которые связаны не с пользовательской, а с мировой системой координат (МСК). Ортогональные виды назовем «виды МСК». Их названия совпадают с названиями видов в курсе инженерной графики. Положительное свойство этих видов также состоит в том, что при их выполнении ПСК автоматически устанавливается «по виду», т. е. ее оси X , Y становятся параллельными сторонам экрана. Это позволяет сразу выполнять построения в плоскости XY . Поскольку ось Z при любом ортогональном виде, не считая изометрии, направлена на наблюдателя, то по кнопке 8 будет указано «Сверху», т. е. ортогональный вид как вид ПСК всегда будет видом сверху.

В связи с привязкой названия вида к осям МСК и в соответствии с названиями, принятыми в инженерной графике (черчении), применение ортогональных видов является предпочтительным.

Ортогональные виды расположены:

- ◆ Вид \ Ортогональные виды \ Раскройте список ▼ – появился список ортогональных видов;

- ◆ укажите, например, ортогональный вид спереди  – независимо от предварительного вида будет установлен вид, направленный на плоскость P_2 . Ось X станет параллельна нижней кромке экрана, ось Y – параллельна вертикальной кромке. По кнопке 8 прочтите, что, как вид ПСК, он назван «Сверху».

2.8.3. Орбита

Рассмотренные выше виды ПСК или МСК являются фиксированными и стандартными, т. е. «Сверху», «Спереди»... «ЮЗ изометрия» и т. д. Для плавной настройки пространственного вида, т. е. для динамичного, в режиме реального времени изменения вида, предусмотрены две команды: «Зависимая орбита» и «Свободная орбита».

Зависимая орбита

Термин «зависимая» указывает, что в этом режиме на траекторию осмотра объекта наложены кинематические зависимости для простого и наглядного управления. При выполнении этой команды происходит выравнивание изображения так, что ось Z МСК принимает вертикальное положение. Вращение выполняется перемещением мыши. При вращении ось Z МСК сохраняет вертикальное положение. Система назначает центр вращения, обозначая его желтой сферой. Если предварительно указать часть объектов, то вращение будет выполняться вокруг них.

Команда особенно удобна для выравнивания изображения объекта, имеющего вертикальные ребра по отношению к «земле» (P_1), в наших примерах это ребра координатных плоскостей или отрезки проецирования объекта на «землю». Команда выставит их в вертикальное положение.

Кнопка «Зависимая орбита»  расположена в строке состояния (см. рис. 2.1, поз. 16) или: Лента \ Вид \ Навигация. Выполните пример вращения параллелепипеда:

- ◆ установите МСК;
- ◆  – появился крестик, перемещаемый курсором. Независимо от предварительного положения параллелепипеда изображение выровнялось на экране так, что вертикальные ребра параллелепипеда и ось Z МСК на экране также стали вертикальными;
- ◆ перемещайте мышь – происходит пространственное вращение изображения, но при этом ребра и ось Z МСК сохраняют вертикальное положение.

Свободная орбита

Команда «Свободная орбита» передает восприятие космонавта, осматривающего Землю (объект) в окно иллюминатора, – отсюда и ее название. Рассмотрим действие команды на примере вращения параллелепипеда или вокруг него.

Выполните команду:

- ◆ Вид \ Навигация  – на экране, в его центре, возникло орбитальное кольцо (рис. 2.3).

Перемещение курсора внутри кольца воспроизводит движение наблюдателя вокруг объекта без собственного вращения (корабль вращается вокруг Земли, облетает ее со всех сторон, космонавт в корабле неподвижен). Перемещение курсора вне круга соответствует вращению наблюдателя при неподвижной точке наблюдения – объект в окне лишь поворачивается в плоскости экрана, облета вокруг него не происходит (космонавт вращается внутри корабля около иллюминатора). Если поместить курсор в один из четырех кружков орбитального кольца, а затем перемещать курсор горизонтально или вертикально, то будет воспроизводиться облет строго по экватору или меридиану Земли.

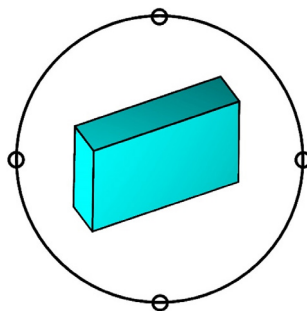


Рис. 2.3. Свободная орбита

- ◆  – возникло орбитальное кольцо.

Поместите объект в центр кольца:

- ◆ вращением ролика отрегулируйте размер изображения, чтобы он поместился внутри кольца;
- ◆ прижмите ролик и перемещайте мышь – переместите объект приблизительно в центр кольца;
- ◆ *Shift* + прижать ролик мыши и перемещайте мышь – придайте объекту начальное положение.

Применяем команду:

- ◆ перемещайте курсор вне орбитального кольца – происходит плоское вращение изображения;
- ◆ перемещайте курсор внутри кольца – происходит пространственное вращение объекта, позволяющее осмотреть его со всех сторон;
- ◆ перемещайте курсор внутри кольца в горизонтальном направлении – вращение выполняется вокруг вертикальной оси (облет по экватору);
- ◆ перемещайте курсор внутри кольца в вертикальном направлении – вращение выполняется вокруг горизонтальной оси (облет земли по меридиану).

Трехмерное вращение изображения, подобное действию команды «Свободная орбита» (если курсор во внутреннем кольце орбиты и без отображения орбитального кольца), можно выполнить, если нажать *Shift* + прижать ролик мыши и перемещать мышь.

2.8.4. Визуальный стиль

Визуальный стиль – это набор параметров, определяющих параметры визуализации 3D-модели. Предусмотрено несколько визуальных стилей, которые можно выбрать указанием кнопки 8 (см. рис. 2.1, третья слева в ряду кнопок 8).

Для модели из отрезков или линий применяют стиль «2D Каркас», который передает цвет линий и ребер объектов, но не воспроизводит грани, поверхности и области.

Для 3D-моделей применяют стили с тонированными гранями. На рис. 1.2а параллелепипед показан в стиле «Скрытые линии». В видовых экранах (рис. 1.2б) спереди, сверху, слева – в стиле «2D Каркас». В окне аксонометрии – в стиле «Концептуальный» или «Тонированный с кромками». Оптимальный для нашего курса – стиль «Концептуальный».

- ◆ Укажите кнопку 8 (см. рис. 2.1), раскройте список визуальных стилей и на примере параллелепипеда посмотрите их действие.

При указании кнопки  или нижней строки списка стилей (кнопка 8) открывается функциональная панель настроек визуальных стилей. Настройки позволяют отображать линии невидимого контура, регулировать толщину и цвет контура моделей, воспроизводить текстуру материалов и др.

Настроим визуальный стиль, действие которого показано на рис. 1.10б, в окне аксонометрии. Стиль отображает солид-объекты, грани объектов не закрашены, ребра – черного цвета. Скрытые линии показаны красного цвета штриховой линией:

- ◆ Вид \ Визуализация \ Визуальные стили  – открылось панель «Визуальные стили»;
- ◆ в окне стилей укажите «Скрытый» \ в разделе «Параметры ребер» задайте режим «Ребра граней Цвет Белый» \ В разделе «Перекрытые ребра» укажите «Показать, Цвет Красный, Образец Штриховая».

2.9. Оценка точности построений на примере изометрии куба

Приведем несложный пример, позволяющий оценить точность геометрических построений Платформы nanoCAD.

Рассмотрим задачу о проекции куба на плоскость, перпендикулярную одной из его диагоналей (рис. 2.4). И. Кеплером (1619 г.) и А. Фрезье (1738 г.) был сделан вывод, что эта проекция представляет собой правильный шестиугольник. Сейчас эту проекцию называют «ортогональная изометрия». В nanoCAD предусмотрено построение восьми изометрий (по две на каждую из четырех диагоналей куба). Каждая из них является шестиугольником. Проверим, насколько изометрия куба, создаваемая в nanoCAD, является правильным шестиугольником.

Построим куб длиной стороны 100. Можно назначить любое другое значение длины. Командой «2D Вид» построим одну из его ортогональных изометрий. Измерим длины сторон очеркового шестиугольника и его диагоналей. Сравним между собой полученные значения и проверим, в какой мере шестиугольник является правильным. Кроме того, сопоставим полученное значение длины с расчетным. Измерения и вычисления выполним с предельной для nanoCAD точностью 10^{-8} .

- ◆ Создайте новый файл на основе шаблона. Включите режим «ОРТО».
- ◆ 3D-инструменты \ Прямое моделирование \ Параллелепипед  \ Первый угол: 0,0 \ Куб \ Длина: 100 – построен куб (рис. 2.4а).

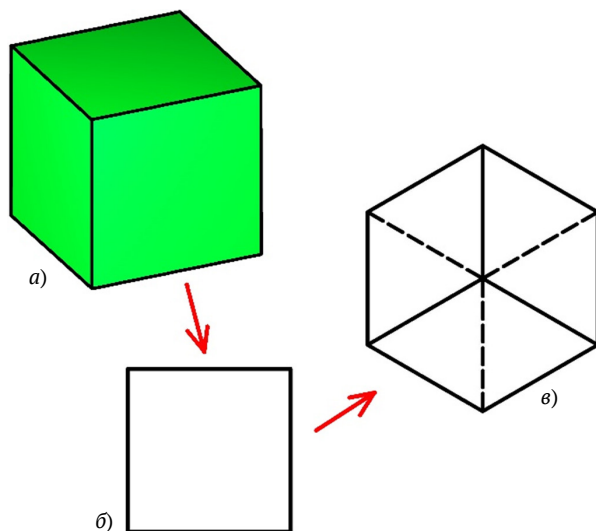


Рис. 2.4. Изометрия куба. Оценка точности:
а – куб; б – 2D Вид сверху; в – 2D Вид, ЮЗ изометрия

- ◆ 3D-инструменты \ 2D-виды \ 2D Вид \ укажите куб \ А3 (т. е. вынесем проекцию на Лист) \ на Листе вслед за курсором тянется квадрат проекции вида сверху (рис. 2.4б) \ укажите положение проекции \ переместите курсор в направлении одной из диагоналей – построен шестиугольник одной из изометрий (рис. 2.4в).
- ◆ Укажите полученную изометрию и откройте панель «Свойства» \ Найдите строку «Показывать скрытые линии» – «Да» – дополнительно появились три диагональных отрезка, являющихся проекциями еще трех невидимых сторон куба.
- ◆ Построение \ Разбивка  \ укажите проекцию – проекция теряет ассоциативную связь с моделью и разбивается на отрезки.
- ◆ Главная \ Свойства \ Единицы – открылась панель «Единицы чертежа» \ установите точность линейных единиц 0.00000000 , т. е. 10^{-8} \ ОК.
- ◆ Охватите рамкой все 12 отрезков изометрической проекции – в панели свойств на строке «Длина» выведено единое для всех отрезков значение 81.64965809.

Вывод 1: при погрешности построений не более 10^{-8} построенный в nanoCAD шестиугольник изометрической проекции можно считать правильным, что соответствует историческим выводам И. Кеплера и А. Фрезье.

Сравним полученное значение с расчетным. На основе тригонометрических преобразований, повторяя выкладки А. Фрезье, можно получить уравнение,

что для куба со стороной a длина отрезков изометрической проекции определяется формулой $a_1 = a \cdot \sin(\arctg\sqrt{2})$.

Вычислим значение a_1 для $a = 100$. Применим имеющийся в nanoCAD вычислитель AutoLisp:

◆ в командную строку введите выражение (setq a1 (* 100 (sin (atan (sqrt 2))))).

При вводе выражения контролируйте скобки, и между элементами должен быть как минимум один пробел. При правильно набранном выражении в командную строку выведен результат $a_1 = 81.6497$. Повысим точность представления этого числа до восьмого знака (можно больше):

◆ введите выражение: (rtos a1 2 8).

В командную строку выведено значение "81.64965809". Сопоставляя его с приведенной выше величиной, определенной геометрическими построениями, видим их совпадение с точностью 10^{-8} .

Вывод 2: погрешность вычислений nanoCAD в рассмотренном примере не превышает 10^{-8} .

2.10. Построения по координатам

Координаты точек, например концов отрезка или центра окружности, можно вводить указанием точки курсором на экране, в том числе с объектной привязкой (см. ниже, раздел 2.13), или вводить с клавиатуры. В первом случае – перемещая мышью, наблюдать за координатами курсора, которые отображаются в строке состояния (см. рис. 1.1, поз. 12) в текущей системе координат (ПСК), и в нужный момент выполнить клик ЛКМ. При вводе с клавиатуры печатать координаты в нужном формате. Рассмотрим ввод с клавиатуры.

2.10.1. Ввод координат с клавиатуры.

Точность задания координат

Вычисления, построения и измерения в Платформе nanoCAD выполняются с точностью 10^{-8} (см. разделы 1.6.1, 2.9). С такой же точностью могут быть отображены координаты и размеры создаваемых им объектов. В нашем курсе достаточно второго знака после запятой. Точность представления координат задается командой «Единицы». Например, установить точность линейных величин с округлением до второго знака после запятой:

◆ Главная \ Свойства \ на строке «Свойства» укажите стрелку справа ▼ – раскрылся список команд;

◆ Единицы \ Точность \ 0.00.

Координаты, вводимые с клавиатуры, воспринимаются в установленной на момент построения системе координат ПСК. Координаты можно задать относительно начала координат ПСК (такие координаты называют абсолютными) или относительно предыдущей точки (это относительные координаты).

Координаты X, Y, Z при вводе разделяются запятой без пробела между ними. Целая и дробная часть любой из координат разделяются точкой. Если коор-

дината $Z = 0$, то ее можно не вводить, ей будет присвоено нулевое значение. Чтобы задать координаты как относительные, т. е. приращения к координатам предыдущей точки, нужно перед координатами ввести знак @.

Существует режим динамического ввода координат, при котором параметры точки отображаются рядом с курсором, отображаются относительные координаты аналогично вводу со знаком @. Режим динамического ввода изучите самостоятельно:

- ◆ Справочная служба \ Платформа nanoCAD \ Инструменты точного позиционирования \ Динамический ввод.

В нашем курсе динамический ввод не применяется.

- ◆ Найдите в строке состояния кнопку «ДИН-ВВОД» и отключите ее. Если эта кнопка в строке отсутствует, то предварительно выведите ее в эту строку (см. раздел 2.3.2).

2.10.2. Ввод в декартовой системе координат

Рассмотрим форматы и примеры задания координат с клавиатуры в декартовой системе координат. Это основной вариант ввода координат. Построения выполняются в текущей системе координат.

Отрезок на плоскости XOY :

- ◆ Главная \ Черчение \ Отрезок  \ смотрим в командную строку и отвечаем на ее запросы \ Первая точка: $-100, -70.5$ \ Укажите следующую точку: $100, 120$ \ для прерывания команды нажмите *Enter* или *Esc*.

Отрезок в пространстве, абсолютные координаты – см. выше раздел 2.7.2.

Прямоугольник, у которого левый нижний угол имеет координаты $(50, 50)$, длина равна 100, высота 70. Применим для второй точки ввод относительных координат:

- ◆ Главная \ Черчение \ Прямоугольник  \ $50, 50$ \ @ $100, 70$ \.

2.10.3. Полярная система координат

Применяется при построениях на плоскости. Положение точки задается длиной и углом наклона отрезка, соединяющего новую точку с предыдущей. Угол измеряется от оси X текущей системы координат в градусах. Положительное значение угла – против часовой стрелки. Формат записи относительных полярных координат: @ $d<\alpha$.

Отрезок с начальной точкой $(150, 100)$, длиной 200, под углом 35° к оси X :

- ◆ Отрезок  \ $150, 100$ \ @ $200<35$.

2.10.4. Комбинированный метод

Можно курсором указать направление радиус-вектора точки, а длину вектора ввести с клавиатуры. Этот режим называют комбинированным вводом. Режим эффективен в сочетании с ортогональным или полярным отслеживанием.

Прямоугольник с координатами левого нижнего угла (50, 50) и длиной диагонали 200, при значении угла диагонали с осью X , равном 45° :

- ♦ указав кнопку «ОТС-ПОЛЯР», задайте угол полярного слежения 45° ;
- ♦ Прямоугольник  \ 50,50 \ перемещайте курсор, пока не сработает полярное слежение и возникнет луч слежения 45° \ введите с клавиатуры 200 – построен квадрат с длиной диагонали 200.

Комбинированный метод эффективен и в трехмерных построениях, в которых перемещение курсора задается в режиме «ОРТО» по осям ПСК. Например, для построения проецирующих отрезков от точек в пространстве к их проекциям на Π_1 или перпендикуляра к плоскости отрезок строим вдоль оси Z .

2.10.5. Сферические координаты

В *сферических координатах* точка задается расстоянием d и двумя углами α и β . Расстояние d – длина отрезка, соединяющего точку либо с началом координат 0, 0, 0 (рис. 2.5а), либо с предыдущей точкой – точкой A (рис. 2.5б). Угол α измеряется между проекцией отрезка d на плоскость XOY и осью X . Угол β измеряется между отрезком d и его проекцией на плоскость XOY , т. е. это угол между отрезком и плоскостью XOY . Углы задаются в градусах. Формат ввода сферических координат: @ $d<\alpha<\beta$. Знак @ означает задание относительных координат. Если угол $\beta = 0$, то его можно не указывать. Рассмотрим примеры.

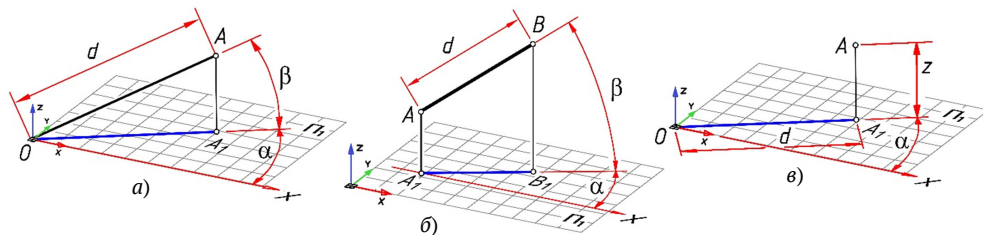


Рис. 2.5. Системы координат сферическая и цилиндрическая:

- а – сферическая, абсолютные координаты;
- б – сферическая, относительные координаты;
- в – цилиндрическая система, абсолютные координаты

- ♦ $100<30<45$ – абсолютные сферические координаты точки, где: 100 – длина отрезка, соединяющего точку с началом координат; 30° – угол α ; 45° – угол β .
- ♦ $100<30$ – абсолютные координаты точки, расположенной в плоскости XOY ($\beta = 0$) на расстоянии 100 от начала координат под углом 30° к оси X .

Основное применение сферических координат – задание точки на необходимом расстоянии от предыдущей точки, т. е. задание относительных координат. Характерный пример – построение отрезка заданной длины в заданном направлении. Например, постройте отрезок AB , если его начальная точка A (18, 22, 30), длина отрезка $d = 60$. Угол $\alpha = 28.6^\circ$ – угол между проекцией отрезка A_1B_1 и осью X ; угол $\beta = 32.5^\circ$ – угол между отрезком AB и его проекцией A_1B_1 (см. рис. 2.5б):

- ◆ Отрезок  \ Первая точка: 18,22,30 \ Следующая точка: @60<28.6<32.5.

2.10.6. Цилиндрические координаты

В *цилиндрических координатах* угол β заменяется декартовой координатой Z – высотой точки в ПСК (рис. 2.5в). Отрезок d измеряется в плоскости XOY . Измерение d производится либо от начала координат (абсолютные координаты), либо от предыдущей точки (относительные координаты). Формат записи цилиндрических координат: @ d < α , z .

Отрезок, его начальная точка имеет координаты (20, 30, 40), горизонтальная проекция имеет длину 55, угол с осью $X = 30^\circ$, а конечная точка выше начальной на 40 мм:

- ◆ Отрезок  \ Первая точка: 20,30,40 \ Следующая точка: @55<30,40.

Полярные координаты, рассмотренные выше (см. раздел 2.10.3), можно рассматривать как частный случай сферических координат, если угол $\beta = 0$, или цилиндрических координат, если $Z = 0$.

При задании нескольких точек в рамках единой команды каждую точку можно задавать в оптимальной для нее системе координат.

2.11. Редактирование геометрии объектов

Редактирование – изменение геометрии и свойств предварительно построенных объектов. О редактировании свойств см. выше, раздел 2.4. Сейчас рассмотрим редактирование геометрии, т. е. формы и положения объектов.

2.11.1. Команды и средства редактирования

Для редактирования геометрии объектов в нашем курсе понадобятся две группы команд. Первая – это команды перемещения объектов, их масштабирование, копирование, поворот, удаление и др. Команды этой группы расположены на Ленте на вкладках «Главная» или «Построение», в группах «Редактирование». Рассмотрим примеры применения этих команд.

Выбор объектов. Все команды редактирования требуют выбрать объекты для редактирования. Это можно сделать до запуска команды или в ответ на запрос команды. Выбор осуществляется тремя способами: указанием курсором, лассо или прямоугольной рамкой.

Для выбора указанием следует навести курсор и выполнить клик ЛКМ. Лассо – криволинейный контур, которым нужно полностью охватить объект или группу объектов. Для лассо следует установить курсор рядом с объектами, прижать левую кнопку мыши и, не отпуская, перемещать мышь. Прямоугольная рамка создается щелчком ЛКМ по двум противоположным углам. Если рамка тянется слева направо, выбираются только полностью охваченные объекты. Если справа налево, будут выбраны все объекты, попадающие внутрь рамки или пересекающие ее границы, – такой тип рамки называют секущей.

Рассмотрим пример выполнения команды редактирования. Переместим отрезок из точки *A* в точку *B*:

- ◆ создайте произвольный отрезок;
- ◆ Главная \ Редактирование \ Перемещение  \ Выбор объектов: укажите отрезок \ Базовая точка: введите координаты точки *A* или укажите точку с объектной привязкой \ Укажите вторую точку: повторите указание для точки *B*.

Вторая группа команд – редактирование солид-объектов. Это построение сечения, разреза, копирование ребер, перемещение граней и др. Команды этой группы рассмотрим при изучении солид-объектов (см. разделы 11 и 12). Команды расположены:

- ◆ Лента \ 3D-инструменты \ Прямое \ Прямое моделирование.

Кроме выполнения команд редактирования из Ленты предусмотрены следующие средства: ручки, выполнение команд из контекстного меню, редактирование из панели «Свойства». Эти инструменты позволяют быстро вносить изменения без перехода к отдельным командам. Рассмотрим эти средства на примере редактирования отрезка.

- ◆ Постройте произвольный отрезок (рис. 2.6а).
- ◆ Укажите отрезок – на контуре возникли ручки (рис. 2.6б). Укажите одну из ручек и потяните ее – происходит изменение геометрии объекта \ укажите или задайте новое положение ручки.
- ◆ Укажите объект и выполните клик ПКМ – возникло контекстное меню (рис. 2.6в). Укажите строку «Редактирование» – возникло дополнительное меню, содержащее команды редактирования \ укажите необходимую команду, например «Перемещение» \ выполняйте команду.

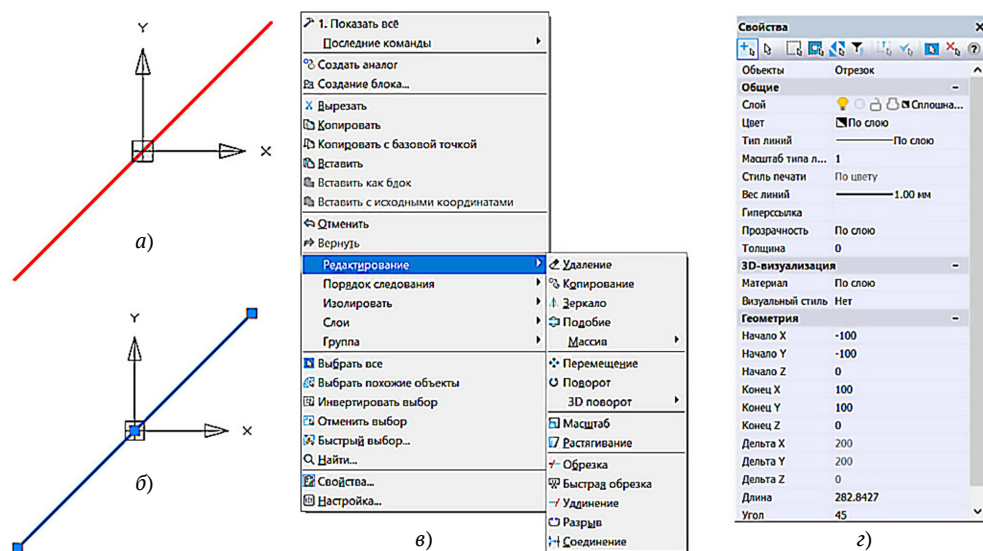


Рис. 2.6. Редактирование отрезка:

а – отрезок; б – ручки; в – контекстное меню; з – панель «Свойства»

- ◆ Укажите объект – в панели «Свойства» в разделе «Геометрия» отображены параметры (координаты точек, радиус для окружности, длина отрезка, углы наклона и др.) указанного объекта (рис. 2.6г). Изменяя эти значения, можно сразу видеть, как меняется геометрия объекта.

Если панель «Свойства» на экране отсутствует, восстановите ее (см. раздел 2.4.3).

2.11.2. Изолирование объектов

При построениях и редактировании объекта или группы объектов удобно временно скрыть остальные объекты (чтобы не мешали) или, напротив, скрыть указанные объекты для работы с остальными. Это выполняют команды, вызываемые в контекстном меню указанием строки «Изолировать» (см. рис. 2.6в). Для восстановления скрытых объектов достаточно повторно указать строку «Изолировать» и в возникшем дополнительном меню указать «Завершить изоляцию объектов».

2.11.3. Копирование через буфер обмена

Этот вариант копирования можно применить как для копирования объектов из одного положения в другое внутри одного документа. Но основное применение – копирование из одного файла в другой или копирование из пространства Модели на Лист или наоборот.

Для копирования:

- ◆ Выберите объекты \ выполните клик ПКМ – открылось контекстное меню (см. рис. 2.6в) \ укажите строку «Копировать» – объекты внесены в буфер обмена;
- ◆ перейдите на новое место (в новый файл, из Модели на Лист...) \ по экрану выполните клик ПКМ – открылось контекстное меню (см. рис. 2.6в) \ Вставить – появились вставляемые объекты, перемещаемые курсором \ Укажите точку вставки.

Для копирования группы объектов рационально применить режим «Вставить как блок». Группа будет вставлена как единый объект – блок, для которого удобно корректировать точку вставки и редактировать как единый объект (поворот, масштабирование и др.). После вставки и корректировки объекты можно извлечь из блока, применив к нему команду «Разбивка» .

2.12. Режимы построений

Режимы обеспечивают повышение точности построений. Управление режимами осуществляется группой кнопок, расположенных в строке состояния слева (см. рис. 2.1, поз. 13).

«ОРТО» – режим, обеспечивающий ортогональные построения, характерные для чертежей. Если режим включен, то построения выполняются только стро-

го горизонтальными или вертикальными линиями. Активно применяется и в 3D-построениях для перемещения или копирования объектов в направлении осей системы координат. Включить или отключить режим «ОРТО» можно нажатием кнопки в строке состояния или клавишей *F8* клавиатуры.

«ОТС-ПОЛЯР» – «режим полярного отслеживания». Он позволяет строить линии под заданными углами. Чтобы задать нужный угол, следует щелкнуть ЛКМ по кнопке «ОТС-ПОЛЯР» в строке состояния и выбрать параметры. Отключение режима производится повторным указанием этой кнопки. Рассмотрим пример использования этого режима:

- ◆ включите режим «ОТС-ПОЛЯР», выполнив по кнопке клик ЛКМ;
- ◆ выполните по кнопке клик ПКМ и в контекстном меню укажите угол слежения, например, 30° ;
- ◆ начните строить отрезок , задав произвольно первую точку, отведите курсор и перемещайте его – тянется линия отрезка.

В моменты, когда угол между линией и осью *X* ПСК равен или является кратным углу слежения, возникнет луч слежения, рядом с курсором и в статусной строке (слева внизу) возникает сообщение с указанием зафиксированного угла и расстояния до первой точки.

- ◆ Перемещайте курсор по лучу слежения \ введите с клавиатуры длину отрезка – построен отрезок заданной длины под углом 30° к оси *X* текущей ПСК.

«ШАГ» – этот режим задает дискретное перемещение курсора по экрану. Например, если установить шаг равным 1, то построения, выполняемые указанием курсора на экране, будут реализованы с точностью до 1. Включение-отключение шага осуществляется указанием кнопки «ШАГ» или с клавиатуры клавишей *F9*.

«СЕТКА» – создает на экране видимую сетку для удобства работы. Включение и отключение сетки осуществляется кнопкой «СЕТКА» или с клавиатуры клавишей *F7*. Сетка занимает прямоугольную область, границы которой определяются лимитами чертежа. Направление сетки определяется осями *X*, *Y* текущей ПСК.

Для настройки шага или дискретности сетки следует выполнить клик ПКМ по соответствующей кнопке, в контекстном меню указать строку «Настройка» и в открывшемся диалоговом окне «Режимы черчения» задать необходимые значения.

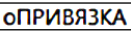
2.13. Объектная привязка и геометрические построения

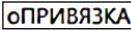
Это средство Платформы nanoCAD, позволяющее предельно точно указать и определить координаты точки по ее качественному признаку, например точка как ранее проставленный маркер точки или как конечная точка отрезка, как центр окружности, как точка касания к ранее построенной окружности и др.

2.13.1. Настройка привязок

Изучите информацию по объектной привязке в справочной службе программы:

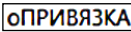
- ♦ откройте справку nanoCAD  \ Содержание \ Платформа nanoCAD \ Инструменты точного позиционирования \ Режим объектной привязки «ОПРИВЯЗКА» – открылась страница с информацией по объектной привязке.

Управление объектной привязкой (настройка, включение-отключение) выполняется по кнопке  строки состояния (рис. 2.1, поз. 13):

- ♦ выполните клик ПКМ по кнопке  – открылось контекстное меню со списком всех привязок. Часть из них активирована (включена);
- ♦ в открывшемся меню укажите строку «Настройка» – открылось окно «Режимы черчения» с открытой вкладкой «Объектная привязка».

В окне «Режимы черчения» показаны предусмотренные 16 привязок. Часть из них активна. Привязки можно подключать или отключать. В нашем курсе понадобятся привязки «Конточка», «Середина», «Центр», «Пересечение», «Нормаль», «Касательная».

- ♦ Включите указанные привязки \ ОК – закройте окно.

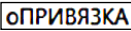
Подготовленные привязки будут действовать при нажатой кнопке  и во время выполнения одной из команд построения графического объекта. Предусмотрено включение \ отключение привязок нажатием клавиши *F3*.

Вместо постоянно действующей привязки можно применять разовый режим. Для этого во время выполнения какой-либо команды следует нажать клавишу *Shift* клавиатуры и, не отпуская ее, щелкнуть правой кнопкой мыши (*Shift* + ПКМ) – возникнет контекстное меню привязок, в котором нужно указать строку нужной привязки. После этого можно продолжить выполнение команды, указав объект, которому предназначена привязка.

Рассмотрим решение задач на применение привязки. Графические условия задач – см. раздел 1.6.2, рис. 1.9.

2.13.2. Отрезок с объектными привязками

Задача 1. Из середины отрезка *a* провести отрезок *m*, касательный к окружности *c* до пересечения с отрезком *b* (см. рис. 1.9а).

- ♦ Подготовьте исходные данные – в глазомерной пропорции постройте окружность *c* и два отрезка *a* и *b*.
- ♦ Включите кнопку . Проверьте, что включены привязки «Середина» и «Касательная».
- ♦ Отрезок  \ Первая точка: укажите отрезок *a* \ рядом с курсором появится название привязки \ дождитесь подтверждения привязки «Середина», иначе *Shift* + ПКМ и укажите эту привязку в контекстном меню \ укажите следующую точку: подведите курсор к окружности со стороны ожидаемого касания и дождитесь подтверждения привязки «Касательная», иначе вызовите привязку в разовом режиме – построен отрезок *m* (1, 2).

Для завершения задачи нужно удлинить отрезок со стороны точки 2 до пересечения с отрезком b . Применим команду «Удлинение»:

- ◆ Главная \ Редактирование \ Удлинение  (если вместо этой кнопки отображена кнопка «Обрезка», то предварительно укажите ) \ Выберите граничные кромки: укажите отрезок b \ Enter \ Выберите объект для удлинения: укажите отрезок m вблизи точки 2 – построен искомым отрезок $m(1, 3)$.

2.13.3. Медианы треугольника

Задача 2. В произвольном треугольнике построить медианы внутренних углов (см. рис. 1.9б).

Из школьного курса геометрии вам известна теорема «Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении 2:1, считая от вершины треугольника». Рассмотрим действие этой теоремы.

- ◆ Постройте произвольный треугольник из отрезков или 2D-полилинией .
- ◆ Убедитесь, что включены объектные привязки «Конточка» и «Середина».
- ◆ Отрезками  постройте три медианы. Вершины треугольника укажите с привязкой «Конточка», стороны треугольника – с привязкой «Середина».

Видим, что в произвольном треугольнике все три отрезка пересеклись в одной точке. Можно до бесконечности увеличивать место пересечения – пересечение остается в одной точке.

Определим отношение длин частей медианы. Применим утилиту «Расстояние»:

- ◆ Главная \ Утилиты \ Сведения \ Расстояние  \ с объектной привязкой укажите две точки одной части любой из медиан – в командной строке показаны значения длины;
- ◆ повторите измерение для второй части той же медианы;
- ◆ F2 – в текстовом окне прочтите результаты измерений;
- ◆ на калькуляторе определите отношение длин. Оно равно 2.

Вместо внешнего калькулятора можно выполнить вычисления на языке AutoLisp – это язык программирования, прилагаемый к Платформе nanoCAD. Допустим, получены значения 114.5757 и 57.2879. Для вычисления следует в командной строке минимум через один пробел ввести выражение (/ 114.5757 57.2879) и нажать Enter. Будет выведен результат 2.0.

- ◆ Составьте выражение для своего примера и введите его в командной строке. Убедитесь, что результат вычислений также равен 2.

2.13.4. Построение кругов Аполлония

Задача 3. Построить окружность, касательную к трем окружностям.

Исходные окружности можно располагать произвольно, со взаимным пересечением. Не допускается лишь их концентричное расположение, в этом случае задача не имеет решения. Рассмотрим вариант, приведенный в лекции 1 (см. рис. 1.9в).

- ◆ В глазомерной пропорции постройте три окружности, как окружности черного цвета на рис. 1.9в.

Построение касательной окружности (их принято называть «кругами Аполлония») выполним командой «Окружность» с опцией «3 точки касания»:

- ◆ Главная \ Черчение \ ниже кнопки «Окружность»  укажите стрелку ▼ – раскроется набор кнопок с опциями команды \ укажите  \ на каждой окружности укажите точку со стороны ожидаемого касания – построен один из кругов Аполлония.

Указывая точки касания с различных сторон заданных окружностей, получим другие круги Аполлония.

Касание кругов с заданными окружностями может быть внутренним и внешним. При внутреннем касании исходная (черная) окружность находится внутри круга (красная окружность). Иначе касание внешнее. На рис. 1.9в круг 1 имеет три внешних касания, круг 2 – три внутренних касания, круг 3 – два внешних и одно внутреннее, круг 4 – два внутренних касания и одно внешнее.

Задача имеет восемь решений, т. е. для трех окружностей можно построить 8 кругов Аполлония.

Кроме касания к трем окружностям, той же командой и опцией можно построить круги Аполлония к отрезкам прямых линий. Например, окружность, касательную к прямой линии и двум окружностям, к трем прямым (вписать окружность в треугольник).

- ◆ Проверьте варианты, в которых окружности заменены отрезками прямых. Например, постройте произвольный треугольник и впишите в него касательную окружность.

Геометрический узор

Создадим красивый геометрический узор из кругов Аполлония (рис. 2.7).

Постройте правильный треугольник:

- ◆ установите режим «ОРТО»;
- ◆ Построение \ Многоугольник  \ число сторон: 3 \ Центр: укажите произвольную точку \ Вписанный в окружность \ Радиус: потяните курсор вверх и введите 50;
- ◆ принимая вершины треугольника за центры, постройте три окружности, каждую радиуса 20, – это будут исходные окружности, к которым следует построить 8 кругов Аполлония;
- ◆ выберите одну из исходных окружностей и постройте четыре круга, которые образуют с ней внутреннее касание. Затем эти круги скройте (изоли-

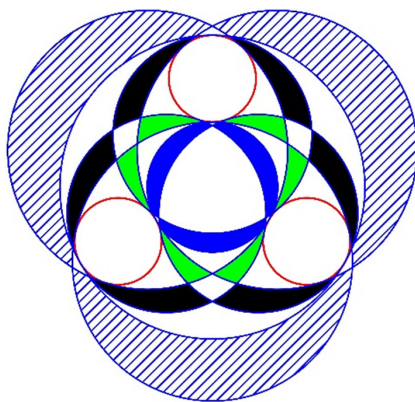


Рис. 2.7. Узор из кругов Аполлония

руйте) и для той же окружности постройте еще четыре круга с внешним касанием. Завершите изоляцию. Построены восемь кругов Аполлония.

Выполните штриховку односторонних секторов, отсекаемых кругами. Соседние секторы должны иметь различную штриховку. Для штриховки в виде отрезков задайте «Тип штриховки» «Из линий», Угол 45° , Интервал 3. Для закрашенных участков – Solid. Для штриховки сектора:

- ◆ Построения \ Штриховка  – в возникшем диалоговом окне укажите «Тип штриховки» \ Добавить точки выбора \ на экране укажите точку внутри сектора штриховки \ ОК – сектор заштрихован.
- ◆ Выполните штриховку всех секторов.

Постройте узор при произвольном размещении исходных окружностей (с неправильным треугольником в основе и различными значениями их радиуса). Здесь возможно множество изящных непредсказуемых вариантов.

- ◆ Постройте свой узор из кругов Аполлония.

2.13.5. Пространственная конструкция из отрезков

Как пример задачи на применение объектной привязки рассмотрим построение пространственной конструкции из отрезков – см. раздел 1.6.3, рис. 1.10а:

- ◆ создайте новый файл на основе шаблона;
- ◆ убедитесь, что включены привязки «Конточка», «Середина», «Центр», «Пересечение», «Касательная» (см. выше, раздел 2.13.1).

Построим отрезок, соединяющий угловые точки 1 и 2:

- ◆ Черчение \ Отрезок  \ Первая точка: подведите курсор к точке 1, задержите на 1...3 с и дождитесь появления сообщения «Конточка», выполните клик ЛКМ \ следующая точка: переведите курсор к точке 2 и повторите указание с привязкой «Конточка» – построен отрезок (1, 2).

Из угловой точки 3 опустим перпендикуляр (3, 4) на отрезок (1, 2). Здесь потребуется привязка «Нормаль». Если в шаблоне она не подготовлена как постоянно действующая, применим ее в разовом режиме:

- ◆  \ Первая точка: укажите точку 3 с привязкой «Конточка» \ Следующая точка: $\text{Shift} + \text{ПКМ}$ \ в контекстном меню укажите строку «Нормаль» \ укажите произвольную точку отрезка (1, 2) – автоматически найдена точка 4 основания перпендикуляра из точки 3 к отрезку (1, 2) – построен отрезок (3, 4).

Построим отрезок (1, 5), где точка 5 – середина отрезка (3, 4):

- ◆  \ укажите точку 1 \ $\text{Shift} + \text{ПКМ}$ \ в контекстном меню укажите строку «Середина» \ укажите произвольную точку отрезка (3, 4) – найдена точка 5 как середина отрезка (3, 4) – построен отрезок (1, 5).

Строим окружность, вписанную в треугольник (1, 4, 5). Необходимо задать плоскость построений ПСК по точкам 5, 4, 1, затем построить окружность с объектной привязкой «Касательная»:

- ◆ Вид \ Координаты \ 3 точки  с привязкой последовательно укажите точки 5, 4, 1 – пиктограмма осей переместилась в положение заданной плоскости;
- ◆ Черчение \ постройте круг Аполлония , вписанный в треугольник (1, 4, 5). Из центра круга постройте отрезок длиной 50, перпендикулярный плоскости треугольника этой окружности:
- ◆ включите режим «ОРТО»;
- ◆  \ Первая точка: Shift + ПКМ, задайте привязку «Центр», укажите окружность в любой ее точке – найден центр окружности, точка 6 \ переместите курсор в направлении оси Z \ в командной строке введите 50 – найдена точка 7. Искомый отрезок построен;
- ◆ командой «Зависимая орбита»  (см. выше, раздел 2.8.3) вращайте изображение, контролируя правильность выполненного построения.

Восстановите МСК и определите координаты точки 7. Для определения координат применить команду «Коорд», введя ее имя с командной строки:

- ◆ Вид \ Координаты \ МСК .
- ◆ КООРД \ подведите курсор к точке 7, дождитесь подтверждения объектной привязки «Конточка» и выполните клик ЛКМ – в командной строке выведены координаты точки в МСК;
- ◆ при правильно выполненных построениях координаты точки 7: $X = 30.55$, $Y = -0.07$, $Z = 70.64$.

2.13.6. Диагонали наклонного параллелепипеда

Построим наклонный параллелепипед (см. раздел 1.6.3, рис. 1.10б) и изучим свойства его диагоналей:

- ◆ создайте новый файл на основе шаблона – см. п.п. 1 и 2, раздел 2.22;
- ◆ перейдите в окно аксонометрии. В окне аксонометрии выполните настройку визуального стиля, как в примере, – см. раздел 2.8.4.

Проще всего выполнить эксперимент с прямоугольным параллелепипедом, построив его одноименной командой . Можете выполнить его самостоятельно. Мы построим наклонный параллелепипед «общего вида», все стороны которого являются параллелограммами. Параллелепипед получим как объект, соединяющий два сечения, которыми являются основания параллелограмма. Построим параллелограмм нижнего основания:

- ◆ включите режим ортогональных построений;
- ◆ перейдите в экран вида сверху  и постройте произвольный прямоугольник по двум точкам .
- ◆ в режиме «ОРТО» сдвиньте за среднюю ручку одну из сторон прямоугольника вдоль этой стороны – прямоугольник преобразован в параллелограмм. Это нижнее основание.

Построим верхнее основание параллелограмма:

- ◆ перейдите в экран аксонометрии;

- ♦ в режиме «ОРТО» скопируйте  основание вдоль оси Z вверх;
- ♦ отключите режим «ОРТО» и переместите  верхний параллелограмм в горизонтальной плоскости на произвольную величину – получено верхнее основание параллелепипеда.

Строим параллелепипед как солид по двум его основаниям:

- ♦ 3D-инструменты \ Прямое моделирование \ Вытягивание по сечениям  \ укажите оба параллелограмма \ дважды *Enter* – построен наклонный параллелепипед (рис. 1.10б).

Строим диагонали. Для эксперимента понадобятся объектные привязки «Конточка», «Пересечение», «Середина»:

- ♦ включите указанные привязки как постоянно действующие (см. раздел 2.13.1);
- ♦ указывая вершины параллелепипеда, постройте четыре отрезка диагоналей .

Убедимся, что все четыре диагонали взаимно пересекаются в одной точке и в этой точке делятся пополам. Пересечение подтверждается тем, что при подведении курсора к месту проверяемого пересечения возникает сообщение объектной привязки «Пересечение».

- ♦ Изолируйте \ Скройте параллелепипед – остались четыре диагонали.
- ♦ Скройте две диагонали из четырех – остались два отрезка диагоналей.

Дополнительно для убедительности и наглядности поставим точку в место пересечения:

- ♦ Главная \ Черчение \ Стрелка вниз ▼ \ Точка  \ поймите в прицел место пересечения оставленных диагоналей и дождитесь сообщения, подтверждающего, что построенные диагонали в пространстве действительно пересекаются \ укажите точку пересечения.

Для визуализации поставленной точки задайте маркер точки – «крестик» (см. выше, раздел 2.7.1):

- ♦ восстановите скрытые диагонали и модель: клик ПКМ по экрану \ в контекстном меню строка «Изолировать» \ Завершить изоляцию объектов.

Повторите проверку для других пар построенных диагоналей – все они пересекаются в одной точке.

Чтобы убедиться, что в точке пересечения диагонали делятся пополам, измерьте длины частей любой из диагоналей:

- ♦ Главная \ Утилиты \ Сведения \ Расстояние  \ с объектной привязкой «Конточка» и «Пересечение» укажите две точки одной части диагонали – в командной строке показаны значения длины;
- ♦ повторите для второй части той же диагонали;
- ♦ нажмите клавишу *F2* – открылось текстовое окно, в котором приведены результаты измерения.

Полученные значения равны. Увеличив командой «Единицы» точность измерений, убеждаемся, что равенство выполняется с предельной точностью до

восьмого знака после запятой, т. е. отрезок диагонали найденной точкой поделен пополам.

◆ Для закрытия текстового окна повторно нажмите $F2$.

Найденная точка при равномерной плотности вещества является также центром масс и центром тяжести объекта. Убедимся в этом. Определим центр масс параллелепипеда:

- ◆ Главная \ Утилиты \ Сведения \ Геометрия и масса  \ укажите параллелепипед \ $F2$ – в текстовом окне приведены координаты точки центра масс;
- ◆ с привязкой «Узел» укажите маркер точки, поставленной в пересечение диагоналей, и в окне «Свойства» найдите ее координаты;
- ◆ сравнивая значения координат точки в текстовом окне со значениями координат точки в панели «Свойства», убеждаемся, что это одна и та же точка, т. е. пересечение диагоналей является центром масс параллелепипеда;
- ◆ для закрытия текстового окна повторно нажмите $F2$.

2.14. Система координат Монжа и система координат nanoCAD

Для построения модели по ее чертежу или чертежа по заданной модели объекты (точки, прямые и т. д.) связывают с системами координат. В начертательной геометрии принята система координат, показанная на рис. 2.8а, как тройка осей $O'X'Y'Z'$. Это декартова правая тройка векторов. Ее начало координат – в вершине трехгранного угла, образованного координатными плоскостями, – точка O' . Ось X направлена справа налево, ось Y – на наблюдателя. Относительно осей этой системы выполняется разворот координатных плоскостей при построении эпюра Монжа, т. е. совмещение проекций в единой плоскости чертежа Π_2 . Эту систему координат назовем системой Монжа.

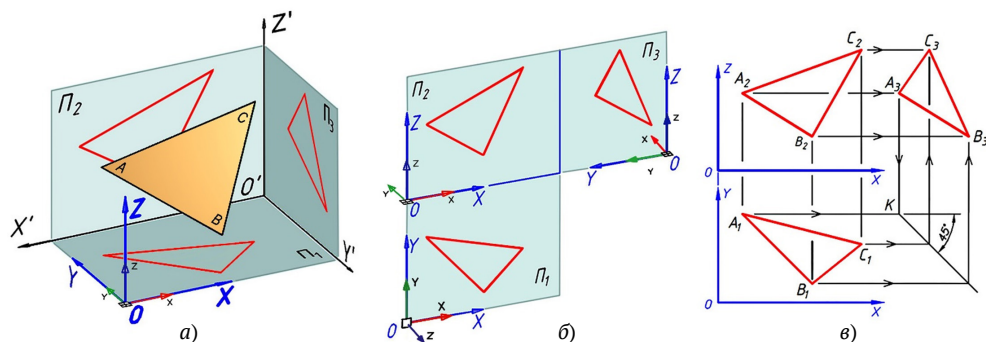


Рис. 2.8. Модель и чертеж треугольника в системе координат nanoCAD:
 а – 3D-модель; б – расположение осей nanoCAD после поворота и совмещения плоскостей проекций; в – чертеж в осях MCK и в системе nanoCAD

В Платформе nanoCAD в качестве основной системы также принята правая тройка ортогональных векторов. Но в отличие от системы Монжа в ней начало

координат расположено в левом ближнем углу плоскости Π , ось X направлена слева направо, ось Y – от наблюдателя. Эту систему будем называть системой папоCAD. На рис. 2.8а система папоCAD показана осями O, X, Y, Z . Система папоCAD также является декартовой правой тройкой векторов. Приведена пиктограмма осей МСК (мировой системы координат, см. раздел 2.6.1), поясняющая, что оси системы папоCAD совпадают с осями МСК. Ось Z в системах Монжа, папоCAD и МСК направлена вверх.

Построение чертежей в нашем курсе будем выполнять, измеряя и задавая координаты в МСК. При повороте плоскостей система папоCAD вращается вместе с ними. В результате вращения оси папоCAD на чертеже принимают положение, показанное на рис. 2.8б, в.

Построение модели, поясняющей расположение осей МСК на чертеже, приведено в разделе 2.23.6.

○ Лектору:

- откройте файл «Модель осей МСК на чертеже .dwg» (см. раздел 2.23.6);
- покажите поворот плоскостей вместе с моделью осей координат МСК.

2.15. Композиция геометрических примитивов

Построим 3D-композицию (рис. 2.9), рассматриваемую в лекции как пример для создания чертежа (см. рис. 1.12). Композиция содержит параллелепипед, конус, полусферу. Конус расположен на верхней грани параллелепипеда, полусфера – на передней. Эти условия необходимо реализовать геометрически точно, без зазоров и пересечений. В остальном размеры и положение элементов композиции могут быть произвольными.

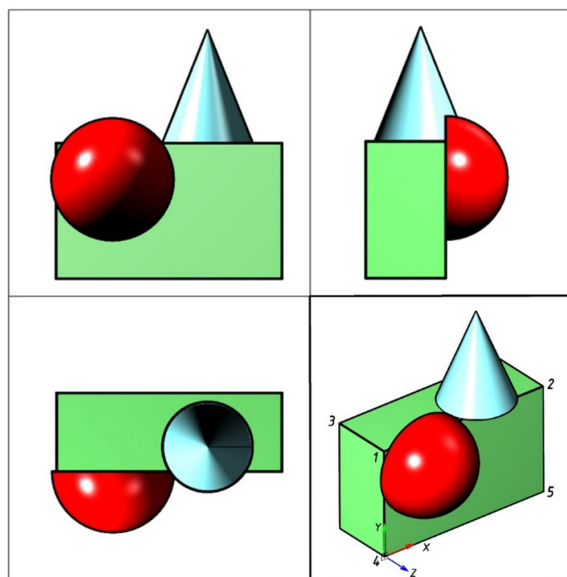


Рис. 2.9. Композиция: призма, конус, полусфера

2.15.1. Построение объектов композиции

- ◆ Создайте новый файл на основе шаблона. Перейдите в окно аксонометрии. Убедитесь, что установлена МСК и визуальный стиль «Концептуальный». Слои с координатными плоскостями заморозьте.

- ◆ Постройте параллелепипед , задав координаты угла (0, 0, 0) и размеры: длина 60 мм, ширина 21 мм и высота 36 мм.

Строим конус на верхней грани параллелепипеда. Установим ПСК так, чтобы плоскость XY совпала с этой гранью. Для задания ПСК применим опцию «3 точки»:

- ◆ включите постоянно действующую объектную привязку «Конточка»;
- ◆ Вид \ Координаты \  \ с объектной привязкой укажите в указанном порядке точки 1, 2, 3 – ПСК и ее пиктограмма установлена по указанным точкам;
- ◆ 3D-инструменты \ Прямое моделирование \ Конус  \ Центр: 40,7 \ Радиус 12 \ Высота: 30 – построен круговой конус как солид-объект.

Строим полусферу, основание которой расположено на передней грани параллелепипеда. Для этого зададим ПСК, у которой XY совмещена с передней гранью. Вновь применим опцию «3 точки». Затем построим сферу, поместив ее центр в плоскость XY . В завершение командой «Разрез» ототрежем половину сферы, погруженную в параллелепипед:

- ◆  \ с объектной привязкой укажите в указанном порядке точки 4, 5, 1 – ПСК и ее пиктограмма установлена по указанным точкам;
- ◆ 3D-инструменты \ Прямое моделирование \ Сфера  \ Центр: 14,25 \ Радиус: 16;
- ◆ 3D-инструменты \ Прямое моделирование \ Разрез  \ Выберите объекты для разрезания: укажите сферу \ Начальная точка режущей плоскости: укажите опцию XY \ укажите точку на XY -плоскости <0,0,0>: Enter (т. е. согласен с точкой 0,0,0) \ выберите сторону, которую необходимо оставить, или [Обе]: Enter (т. е. оставить обе части) – на поверхности сферы появилась линия сечения;
- ◆ удалите полусферу, погруженную в параллелепипед.

Композиция построена. Для повышения наглядности придайте объектам различный цвет.

2.15.2. Источники света

Установим два источника света, действие которых заметно повысит наглядность композиции:

- ◆ Вид \ Визуализация \ Источники света \ Раскройте список по стрелке ▼ – открылся список шести типов источников света.

Наиболее простым в настройке является точечный источник. Его параметрами являются координаты положения и коэффициент интенсивности. Эти пара-

метры подбирают экспериментально, контролируя качество освещения. Положение точечного источника обозначается маркерами (рис. 2.10).

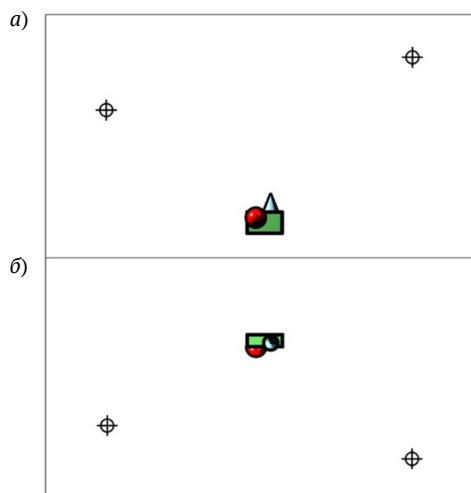


Рис. 2.10. Маркеры и положение точечных источников света:
а – вид спереди; б – вид сверху

Для композиции (см. рис. 2.9) создадим два точечных источника света. Первый источник будет создавать блик света на криволинейных поверхностях сферы и конуса. Второй – обеспечит подсветку теневых сторон объектов.

Первый источник:

- ◆ установите МСК;
- ◆ Вид \ Визуализация \ Источники света \ Точсвет  \ Задайте положение источника: -400,-225, 350 \ Имя: Бликовый \ иНтенсивность: 0.5.

Действие первого источника контролируйте по появлению бликов на сфере и конусе (см. рис. 2.9).

Второй источник:

- ◆  \ Задайте положение: 450,-320,500 \ Имя: Подсветка \ иНтенсивность: 0.1.

Действие второго источника контролируйте по «смягчению» затененной части сферы и конуса.

- ◆ Увеличьте область изображения композиции в экранах видов сверху и спереди, найдите маркеры созданных точечных источников.

Редактировать положение источника можно перемещением его маркеров. Универсальный вариант редактирования всех параметров источника – через окно «Свойства».

- ◆ Выполните двойной клик ЛКМ по маркеру источника – открылось окно «Свойства».
- ◆ В окне «Свойства» найдите разделы «Свет» и «Геометрия».

В разделе «Свет» показаны текущие значения параметров источника. Выбрав необходимый параметр, можно в правой части строки по стрелке ▼ задать новое значение. Например, изменить интенсивность, отключить\включить источник. В разделе «Геометрия» приведены координаты источника в ПСК. Корректируя значения координат, можно перемещать источник в пространстве.

- ◆ Выполните редактирование положения и параметров источников, добываясь необходимого освещения объектов.
- ◆ Сохраните модель в файле «Композиция призма сфера конус .dwg».

2.16. 2D-метод построения чертежа (чертежа композиции)

При построении чертежа 2D-методом проекции формируют либо вручную с помощью карандаша, линейки и циркуля на бумаге, либо с использованием построений в графических программах, используя команды создания отрезков, прямых, окружностей и дуг. Рассмотрим последовательность построения чертежа на примере композиции (см. рис. 2.9).

В компьютерном варианте 2D-чертеж можно выполнять в пространстве Модели на виде сверху  или на Листе . Предпочтительно выполнение на Листе. В бумажном варианте работу начинают с подготовки листа бумаги и чертежных инструментов.

Построение 2D-чертежа начинается с разметки – определения положения проекций с учетом места для размеров (см. рис. 2.11а). Это особенно важно при работе вручную на бумаге, где ошибка в разметке может потребовать трудоемкой перестройки практически законченного чертежа. В компьютерном варианте разметку легко поправить, перемещая проекции на экране.

Далее тонкими линиями выполняется построение прямоугольников, которые образуют проекции параллелепипеда (см. рис. 2.11а). После этого добавляются проекции конуса (рис. 2.11б) и полусферы (рис. 2.11в). Контуры проекций выполняются сплошной толстой линией, оси симметрии проекций полусферы и конуса – штрихпунктирной, невидимый контур – штриховой линией. Для повышения наглядности чертежа его можно выполнить цветными линиями (см. рис. 2.11г).

В теоретическом курсе на чертежах следует обозначить проекции точек. Это позволяет достичь более полного понимания пространственной формы модели. Каждая точка имеет имя и индекс проекции (см. раздел 1.4.7).

Проекции различных точек на чертеже могут совпадать. Примером являются проекции угловых точек параллелепипеда (см. рис. 2.11г). Такие точки называют конкурирующими. Для более полной информации о конкурирующих точках отмечают видимость точек. Например, запись: $1_2 = (3_2)$ означает совпадение фронтальных проекций точек 1 и 3, причем точка 1 расположена ближе к наблюдателю, чем точка 3. То есть точка 1 закрывает точку 3, и точка 3 является невидимой.

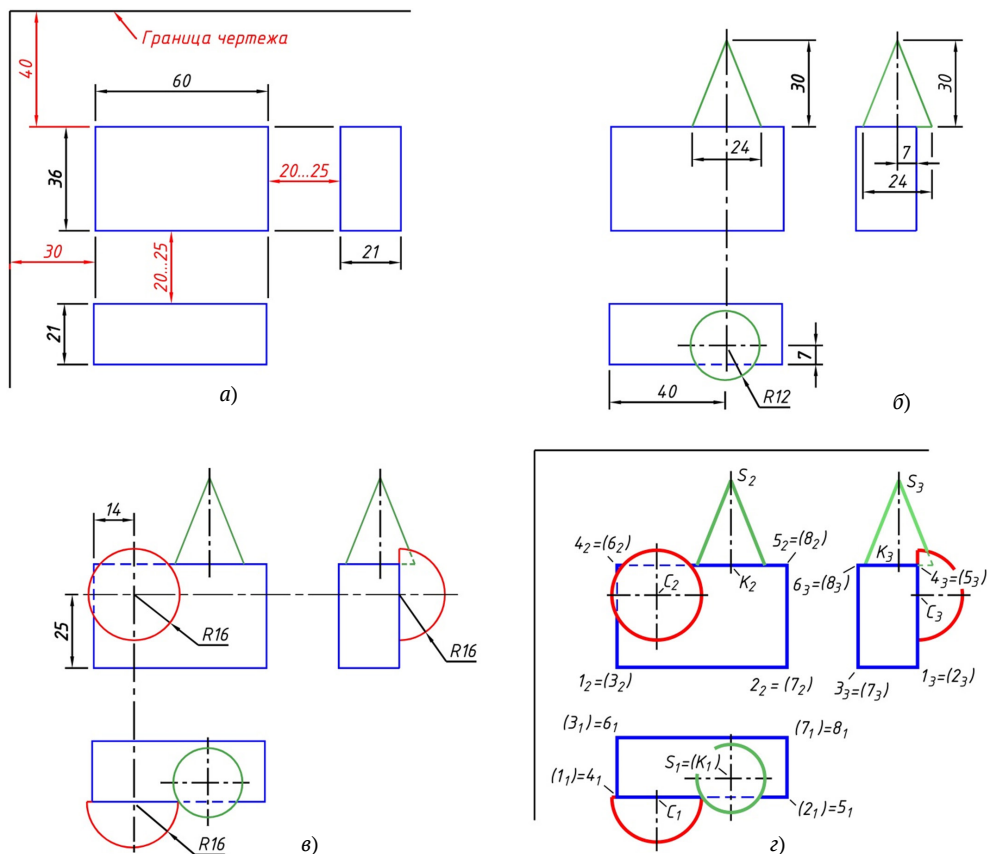


Рис. 2.11. Последовательность построения чертежа композиции (вариант 2D):
 а – компоновка чертежа и проекции параллелепипеда; б – добавление проекций конуса;
 в – добавление проекций полусферы; г – обозначение проекций точек

2.17. Автоматизированное построение проекций. 2D-Виды

Рассмотрим построение проекций командами «2D Вид» и «2D Проекционный вид» для 3D-модели композиции (см. рис. 1.12, 2.9).

- ◆ Откройте файл «Композиция призма сфера конус .dwg» (см. выше, раздел 2.15), содержащий построенную 3D-модель композиции.
- ◆ По пиктограмме ПСК убедитесь, что активно пространство Модели, установлена МСК и вид сверху. Иначе перейдите в это пространство, указав кнопку «Модель», и выполните ортогональный вид сверху .

Построения начинаем командой «2D Вид», которой создадим проекции видов сверху и спереди. Действия поясняются стрелками (см. рис. 1.12):

- ◆ Лента \ 3D-инструменты \ 2D-виды \ 2D Вид \ Выберите объекты: укажите модель, включая все объекты композиции \ Укажите Лист, куда бу-

дет вставляться вид(ы): укажите опцию «Модель» (т. е. размещать виды будем в пространстве Модели) \ перемещайте курсор – тянется изображение проекции \ укажите положение проекции как произвольную точку на плоскости XY (стрелка 1) – проекция зафиксирована \ переместите курсор по направлению оси Y (стрелка 2) – изображение проекции перемещается вслед за курсором \ укажите положение проекции вида спереди \ прервите команду, выполнив клик ПКМ или *Enter*.

Для построения проекции вида слева применим команду «2D Проекционный вид»:

- ◆ Лента \ 3D-инструменты \ 2D-виды \ 2D Проекционный вид  \ Выберите объекты: укажите проекцию вида спереди \ перемещайте курсор вправо (стрелка 3) – изображение проекции перемещается вслед за курсором \ укажите положение проекции \ завершите команду.

Построены три основные проекции модели. Добавим к ним изометрические проекции. Они создаются командой «2D Проекционный вид» на основе ранее построенных основных проекций при перемещении курсора в любом из четырех направлений под 45°. Построим две наиболее наглядные в рассматриваемом примере проекции: ЮЗ и ЮВ изометрии (о названиях проекций см. ниже, раздел 2.18). Для этого укажите проекцию вида спереди и переместите курсор по стрелкам 4, 5:

- ◆ Лента \ 3D-инструменты \ 2D-виды \ 2D Проекционный вид  \ Выберите объекты: укажите проекцию вида спереди \ переместите курсор по стрелке 4 и зафиксируйте положение проекции – построена «ЮВ изометрия сверху»;
- ◆ повторите построение по стрелке 5 – получена «ЮЗ изометрия сверху».

В итоге построены изображения, составляющие основу чертежа рассмотренной композиции.

Рассмотрим свойства и редактирование 2D-видов.

- ◆ Наведите курсор на какой-либо из созданных 2D-видов. Рядом с курсором возникает сообщение «2D Вид».
- ◆ Выполните клик ЛКМ по какому-либо 2D-виду и откройте функциональную панель «Свойства». В разделе «Общие» приведены слой и свойства 2D-вида.

Линии невидимого контура могут быть показаны на любом изображении, построенном командой группы «2D-виды». По умолчанию эти линии отключены. Для их отображения необходимо указать предварительно построенное изображение, затем в панели «Свойства» найти строку «Показывать скрытые линии» и задать «Да». В примере (см. рис. 1.12б) скрытые линии включены для проекций видов сверху, спереди, слева. Настройка длины штрихов скрытых линий выполняется через панель «Свойства» регулировкой на строке «Масштаб типа линий»:

- ◆ включите скрытые линии для указанных проекций;
- ◆ отрегулируйте длину штриха скрытых линий, задав величину 3...4 мм.

Все объекты группы «2D-виды» являются ассоциативными. Ассоциативность – это связь объектов с «родительским» объектом, на основе которого они были созданы. Прежде всего это проявляется в связи 2D-видов с 3D-моделью. Редактирование 3D-модели автоматически приводит к соответствующей корректировке всей цепочки 2D-видов. Удаление 3D-модели приведет к удалению всей цепочки 2D-видов. Удаление 2D-вида автоматически удаляет все проекционные виды, созданные на его основе. Рассмотрим ряд примеров.

- ◆ Удалите 3D-модель – исчезли все проекции этой модели. Восстановите модель.
- ◆ Удалите проекцию вида спереди – исчезли построенные на ее основе проекции видов слева и обе аксонометрии.
- ◆ В 3D-композиции удалите сферу – изображение сферы исчезло на всех проекциях.
- ◆ В 3D-композиции переместите конус – перемещение показано на всех проекциях.

2D-виды автоматически создаются в проекционной связи с «родительским» видом. Например, переместив вправо вид сверху, увидим такое же перемещение вида спереди. Перемещение 2D-вида возможно только вдоль линий проекционной связи. Можно освободить 2D-вид от проекционной связи с родительским видом. Для этого в панели свойств вида следует найти строку «Выравнивать» и задать ее параметр «Нет».

2D-виды можно поворачивать на требуемый угол. Для этого в панели «Свойства» найти строку «Угол» и задать его значение. Будет выполнен поворот только указанного вида.

При построении чертежа возникает необходимость разбить 2D-вид на элементы (командой «Разбивка» ). В этом случае проекция перестает быть 2D-видом и удаляются все последующие проекции, созданные на ее основе. Поэтому разбивку следует выполнять, начиная с конечного вида цепочки видов, либо выполнять разбивку одновременно всей цепочки видов, выбирая ее рамкой.

2.18. Изометрические виды и проекции в nanoCAD

В nanoCAD предусмотрено автоматическое построение ортогональных изометрических видов и проекций. Названия изометрическим видам и проекциям присваивают по сторонам горизонта, определяемым условным компасом, в котором стрелка на север направлена по оси Y системы координат, а ось X направлена на восток (рис. 2.12а). Смотреть на объект можно сверху и снизу, поэтому могут быть изометрические виды «сверху» и «снизу». Всего восемь изометрий. Например, если взгляд на объект направлен со стороны юго-запада, сверху, то вид называется «Юго-западная изометрия сверху» (обозначается «ЮЗ изометрия сверху»). На рис. 2.12а на примере параллелепипеда приведены изометрические виды в МСК сверху.

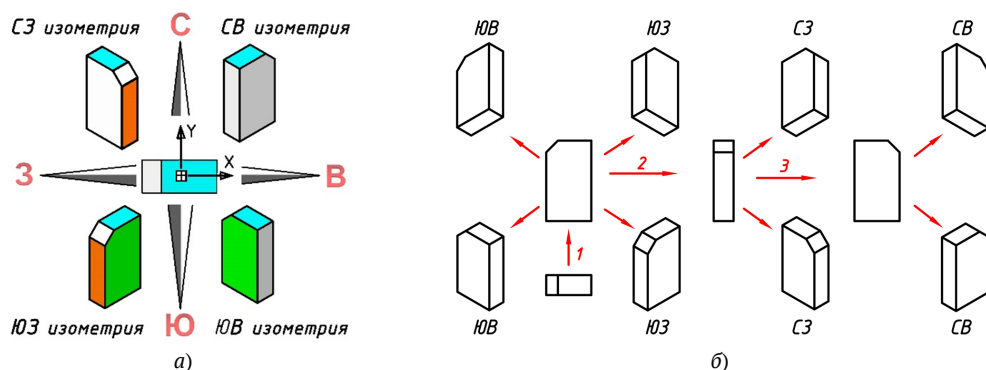


Рис. 2.12. Изометрические виды сверху (а) и все проекции как 2D-виды (б).
Нижний ряд – «сверху», верхний ряд – «снизу»

Предусмотрено два варианта задания вида (см. также раздел 2.8.2). Если оси компаса мысленно направлять по осям МСК, то виды назовем «виды МСК». Они задаются командами:

◆ Вид \ Виды \ Изометрические виды \ Раскрыть список вниз ▼.

При направлении компаса по осям ПСК виды задаются кнопкой 8 (см. рис. 2.1). Это «виды ПСК».

Если в видовом экране система ПСК отличается от МСК, то одно и то же изображение будет иметь различное название как вид МСК или вид ПСК. Название, отображаемое в поле 8, также будет изменяться, если при неизменном изображении переопределить ПСК.

На чертежах применяют аксонометрические проекции. При изометрических видах образуются изометрические проекции. Как правило, плоскость проекции, она же плоскость чертежа, располагают перпендикулярно направлению вида. Такие аксонометрические проекции называют ортогональными.

В nanoCAD предусмотрено автоматическое построение ортогональных изометрических проекций. Оно выполняется командами группы «2D-виды» (см. выше, раздел 2.17). Предварительно командой «2D Вид»  нужно построить виды сверху и спереди (рис. 2.12б) (стрелка 1). Командой «2D проекционный вид»  построить виды слева и сзади (стрелки 2, 3). Затем той же командой диагональными перемещениями курсора построить изометрические проекции «сверху» и «снизу». На рис. 2.12б приведены названия образующихся проекций в соответствии с обозначениями изометрических видов.

2.19. Построение аксонометрической проекции вручную

Ручная техника построения аксонометрической проекции помогает лучше понять принцип и порядок ее выполнения. В качестве примера построим аксонометрии двух треугольников, изображения и координаты вершин которых

показаны на рис. 1.7 и 1.11. Построения выполняются в рабочей тетради, карандашом и по линейке.

Первоначально нужно задать оси координат и масштабы измерения по каждой оси в виде шкалы. Согласно теореме Польке–Шварца (см. раздел 1.9) оси и масштабы могут быть заданы произвольно – при любом их изображении в пространстве может быть найдено положение тройки декартовых осей и направление проецирования, при котором эти оси отобразятся в предварительно начерченные. Поскольку с осями связан объект-треугольник, то различной будет наглядность создаваемой проекции треугольника. Поэтому оси и масштабы задаем из условия наглядности создаваемой проекции, в остальном произвольно.

Пусть аксонометрические оси и масштабы заданы как на рис. 2.13а. Это оси и масштабы некоторой диметрии, поскольку масштабы по двум осям – X и Z – заданы равными. На рис. 2.13б, в показаны различные варианты построения точек на аксонометрическом чертеже. Первоначально по координатам X, Y строим горизонтальные проекции точек, например $A_1, B_1, \dots$, затем добавляем высоту точек как их Z -координаты. Невидимые линии выполняем штриховыми. Для наглядности контуры треугольников выполняем заштрихованными.

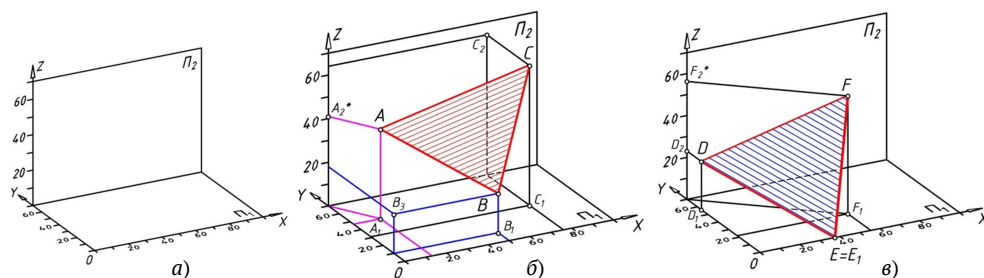


Рис. 2.13. Построение аксонометрических чертежей:
а – аксонометрические оси; б – треугольник ABC (см. рис. 1.7);
в – треугольник DEF (см. рис. 1.11)

2.20. Шаблон

Шаблон – это файл с заранее выполненными настройками, которые помогают сэкономить время при создании новых моделей и чертежей. Его основная задача – передать подготовленные параметры (например, стиль линий, размерность, формат листа) в новый рабочий файл. При этом сам шаблон не изменяется, и его можно использовать многократно.

Создадим шаблон для нашего курса. Шаблон рекомендуем выполнить каждому студенту самостоятельно и присвоить ему индивидуальное имя. Создавая свой шаблон, студент знакомится с настройками и командами, необходимыми для решения задач нашего курса:

- ♦ создайте новый файл (см. раздел 2.2) и сразу сохраните его в своей папке с именем, например «Шаблон студента Петрова». Файлу будет присвоено расширение `.dwg`, т. е. будет создан файл с именем «Шаблон студента Петрова `.dwg`».

Начнем создавать настройки, необходимые для задач нашего курса. Установим режим «ЕСКД» (единая система конструкторской документации), характерный для построения машиностроительных чертежей:

- ◆ Настройки \ Адаптация \ Настройка объектов  – возникло диалоговое окно «Настройки naпoCAD» \ в правом нижнем углу окна раскройте список «Стандарт» и укажите «ЕСКД» \ ОК.

Настройте параметры интерфейса:

- ◆ настройте строку состояния – см. раздел 2.3.2;
- ◆ настройте цветовую гамму интерфейса – см. раздел 2.3.3.

2.20.1. Настройка пространства Модели

В новом файле по умолчанию установлено пространство Модели (см. раздел 2.5). Признаком этого пространства является пиктограмма осей координат. При создании нового файла пиктограмма имеет вид . Это пиктограмма осей мировой системы координат (МСК) для вида сверху. Иначе выполните настройки:

- ◆ в левом верхнем углу графической области укажите кнопку 8 (виды) и задайте вид «Сверху»;
- ◆ Вид \ Координаты \  – установлена МСК;
- ◆ откройте панель «Свойства» и выполните настройки пиктограммы осей, при которых пиктограмма устанавливается в начало координат, – см. раздел 2.6.3.

Задайте параметры, определяющие точность:

- ◆ задайте шаг равным 1 – см. раздел 2.12;
- ◆ командой «Единицы» установите округление линейных десятичных единиц 0.00 – см. раздел 2.10.1. Округление угловых единиц (в градусах) установите 0.0;
- ◆ задайте постоянно действующие объектные привязки «Конточка», «Середина», «Центр», «Пересечение», «Нормаль», «Касательная» – см. раздел 2.13.1.

Задайте границы области построений и отобразите их на экран:

- ◆ Главная \ Свойства  \ Лимиты чертежа \ Левый нижний угол: –300, –300 \ Правый верхний угол: 300,300.
- ◆ В строке состояния справа укажите кнопку «Показать все» .

Перемещайте курсор по экрану и убедитесь, что координаты курсора, отображаемые в строке состояния на экране слева внизу (см. рис. 2.1, поз. 12), изменяются в пределах заданных лимитов и имеют установленную точность.

Убедитесь также, что пиктограмма осей имеет вид  и перемещается по экрану вслед за курсором.

2.20.2. Модели координатных плоскостей

В задачах теоретического курса, связанных с пространственными построениями и преобразованиями, важно «не заблудиться» в пространстве. С этой целью в шаблоне создадим модели плоскостей проекций (см. рис. 2.14). Эти

плоскости понадобятся и как объекты, на которые будем строить проекции моделей, и как средства наглядности выполняемых построений, и для дизайна при оформлении задач.

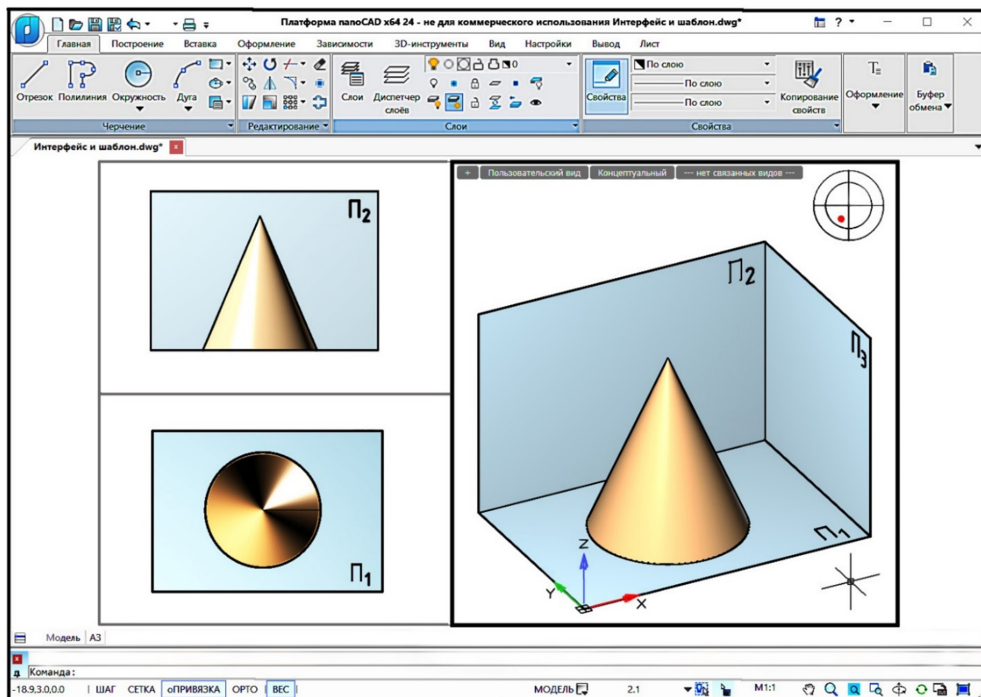


Рис. 2.14. Видовые экраны и координатные плоскости шаблона

Для создания плоскостей проекций построим параллелепипед, грани которого параллельны плоскостям МСК. Затем выполним разбивку параллелепипеда на отдельные грани. Удалим три ближайшие грани, а три оставшиеся будут использоваться как координатные плоскости для построений:

- ◆ убедитесь, что установлена МСК и вид сверху;
- ◆ 3D-инструменты \ Режимы моделирования \ Прямое \ Прямое моделирование \ кнопка «Параллелепипед»  \ Первый угол: 0,0 \ Другой угол: 100,70 \ Высота: 70 – построен параллелепипед длиной 100, шириной и высотой по 70 мм;
- ◆ задайте визуальный стиль «Концептуальный» или «Тонированный с кромками»;
- ◆ придайте параллелепипеду светлый мягкий цвет, например 131 (см. раздел 2.4.2), или команда: Цвет \ Вся палитра \ RGB \ 204,238,235.

Разбейте объект на составляющие его грани и удалите три ближние грани:

- ◆ Главная \ Разбивка  \ укажите параллелепипед \ Удаление  \ укажите удаляемые грани: верхнюю, левую и переднюю. Остались три грани: нижняя, правая и задняя.

Нанесем названия плоскостей проекций. Для каждого названия нужно установить ПСК, совместив плоскость XU с плоскостью проекций, и применить команду «Текст» с шрифтом ГОСТ 2.304. Начнем с горизонтальной плоскости, которая расположена в плоскости XU системы МСК. Присвоим плоскости название « Π_1 »:

- ◆ Оформление \ Текст \ раскройте список стилей текста ▼ и задайте ГОСТ 2.304 \ Текст ▼ \ Однострочный \ Начальная точка: укажите точку в углу плоскости (см. рис. 2.14) \ Высота 5 \ Угол поворота текста: 0 \ Ввод текста: Π_1 \ Esc.

Для фронтальной плоскости:

- ◆ Вид \ Координаты \ 3 точки \ с объектной привязкой «Конточка» укажите три точки фронтальной плоскости, направив ось X вправо, ось Y – вверх;
- ◆ повторите ввод текста с надписью « Π_2 »;
- ◆ повторите построения для создания надписи « Π_3 » в профильной плоскости.

Создадим три новых слоя с именами Π_1 , Π_2 , Π_3 и поместим на них плоскости с нанесенными названиями. Нижнюю – на Π_1 , фронтальную – на Π_2 , правую – на Π_3 . Расположение плоскостей по слоям позволит управлять их видимостью, включая-отключая или замораживая слои.

- ◆ Создайте указанные слои (см. раздел 2.4.4).
- ◆ Поместите плоскости и текстовые надписи на созданные слои – о перемещении объектов на слой см. раздел 2.4.2, 2.4.3.
- ◆ Создайте дополнительно 1–2 рабочих слоя для выполнения построений при решении задач.

Для наглядности и контроля шаблона постройте на рабочем слое конус (см. рис. 2.14):

- ◆ 3D-инструменты \ Режимы моделирования \ Прямое \ Прямое моделирование \ кнопка «Конус»  \ Центр основания: 48,36,0 \ Радиус: 25 \ Высота: 60;
- ◆ задайте 1–2 точечных источника света (см. раздел 2.15.2.). Для источников задайте новый слой и переместите маркеры источников на этот слой;
- ◆ для отображения точек задайте маркер «прямой крестик» (см. раздел 2.7.1).

2.20.3. Настройки пространства Листа

О пространстве Листа, его применении, терминах и методах работы в нем см. раздел 2.5. Создадим конфигурацию из трех видовых экранов. Их назначение – одновременное отображение объектов в различных видах:

- ◆ для перехода из пространства Модели на Лист укажите вкладку А3 (см. рис. 2.1, поз. 11).

На экране отображено пространство Листа. Его признаком является треугольная пиктограмма осей (см. рис. 2.23, *и*). Возможно, что на листе отображен формат А3 для черчения. В этом случае построения будем выполнять правее этого формата.

- ◆ Вид \ Видовые экраны  \ в диалоговом окне укажите закладку «Новые видовые экраны» \ Стандартные конфигурации: Три Справа \ ОК \ Первый

угол: укажите произвольную точку на свободном месте Листа \ Противоположный угол: @420,297 – это координаты противоположного угла в режиме приращений – возникли рамки трех видовых экранов (рис. 2.14).

Рекомендуется рядом, правее, по аналогии создать конфигурацию из четырех видовых экранов (см. рис. 1.8б).

При создании видовых экранов их настройки изображения такие же, как в пространстве Модели на момент создания. Чтобы изменить настройки отдельно для каждого экрана, сделайте двойной щелчок ЛКМ по экрану. Для перехода в другой экран просто щелкните по нему ЛКМ. Признаком того, что вы перешли в пространство Модели, будет появление пиктограммы координатных осей внутри экрана. Активный экран также выделяется толстой рамкой.

Чтобы вернуться на Лист, нажмите кнопку 15 (см. рис. 2.1) или сделайте двойной щелчок ЛКМ по любой точке Листа вне рамок экранов. Признаком перехода в пространство Модели является появление в экране одной из пиктограмм декартовых осей, например $\begin{matrix} y \\ | \\ x \end{matrix}$. Рамка активного видового экрана выделяется толстой линией. Для выхода из экранов на Лист следует указать кнопку 15 (см. рис. 2.1) или выполнить двойной клик ЛКМ по любой точке Листа вне рамок экранов:

- ♦ выполните переход в один из видовых экранов, переход между экранами и выход на Лист.

Задайте в экранах ортогональные виды. В левом нижнем окне – вид сверху, в левом верхнем окне – спереди, в правом экране – ЮЗ изометрию. Для задания ортогональных видов:

- ♦ перейдите в настраиваемый экран;
- ♦ Вид \ Ортогональные виды ▼ \ укажите кнопку вида;
- ♦ Вид \ Изометрические виды ▼ \ ЮЗ изометрия;
- ♦ применяя команды «Показать все» , «Панорамирование»  и «Навигация» , а для окна аксонометрии кнопку «Зависимая орбита» , настройте изображения (см. раздел 2.8) в экранах и проекционную связь между ними, как на рис. 2.14;
- ♦ в видовых экранах найдите пиктограммы осей. В окне вида сверху должна быть $\begin{matrix} y \\ | \\ x \end{matrix}$, в окне спереди $\begin{matrix} y \\ | \\ x \end{matrix}$, в аксонометрии $\begin{matrix} y \\ | \\ x \end{matrix}$.

2.20.4. Формат чертежа для нашего курса

Для контрольно-графических заданий КГЗ_2, КГЗ_3 (см. раздел 1.1) понадобится формат учебного чертежа. За основу возьмем стандартный формат А3, установленный на листе по умолчанию, и заменим штамп на свой «штампик».

- ♦ Командой «Разбивка»  разбейте формат А3 на линии. Удалите линии стандартного штампа. Начертите наш штамп (рис. 2.15).
- ♦ Для заполнения штампа примените команду «Многострочный текст», шрифт ГОСТ 2.304, высота 2.5 мм.

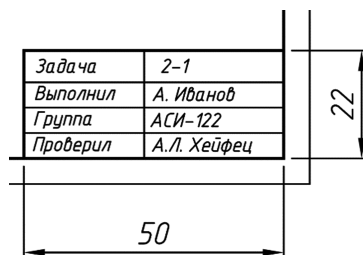


Рис. 2.15. Штамп для шаблона

- ◆ Создайте новый слой и переместите на него новый формат.
- ◆ Окончательно сохраните созданный шаблон. Он позволит ускорить решение задач. В последствии шаблон можно совершенствовать, адаптируя его к условиям решаемых задач.

2.21. Определение геометрических характеристик моделей

При решении задач возникает необходимость определить координаты точек найденного отрезка, площадь построенного многоугольника или многогранника и другие геометрические параметры объектов. Эти параметры могут быть ответом задачи или промежуточным результатом построений.

Определение многочисленных геометрических характеристик моделей папо-CAD выполняется автоматически применением ряда команд.

Точность отображения геометрических характеристик всеми командами задается командой «Единицы» (см. раздел 2.10.1). В шаблоне отображаемая точность задана «до сотых» (см. раздел 2.20.1). Подчеркнем, что это лишь точность отображения, вычисления выполняются с точностью до 10^{-8} (см. раздел 2.9).

Набор команд для определения геометрических характеристик находится:

- ◆ Главная \ Утилиты ▼ \ Сведения  ▼ \ – открылся список команд.

Команда «Расстояние»  показывает расстояние между двумя точками на плоскости и в пространстве.

Команда «Геометрия и масса»  определяет массовые характеристики тел: центр тяжести, моменты инерции и др. Эти измерения понадобятся в курсах инженерной и компьютерной графики, строительной механики, сопротивления материалов и др. Пример применения команд «Расстояние» и «Геометрия и масса» приведен в разделе 2.13.6.

Команда «Сведения»  – открывает кнопочное меню «Выбор значений» для выбора ряда команд, например, «Периметр». Следует указать объект и кнопку меню – в командную строку выведен результат измерения.

Команда «Коорд» – определяет координаты точки, указанной курсором. Указание должно быть выполнено с объектной привязкой. Координаты приводятся в текущей системе координат и выводятся в командную строку. Команду можно вызвать с командной строки по имени «Коорд» или:

- ◆ Главная \ Утилиты ▼ \ Координаты \ с объектной привязкой укажите измеряемую точку.

Кроме команд из раздела «Утилиты», геометрические характеристики отображают команда «Список» и функциональная панель «Свойства».

Команда «Список» выводит сведения о геометрии указанного объекта в текстовое окно. Для выполнения команды следует:

- ◆ ввести имя команды с командной строки \ указать объект \ нажать клавишу F2 – откроется текстовое окно;

- ◆ для того чтобы закрыть или повторно открыть текстовое окно, еще раз нажмите клавишу $F2$.

Вместо использования текстового окна $F2$ можно развернуть область командной строки вверх, потянув ее верхнюю границу мышкой.

В текстовом окне хранится протокол (журнал) работы в текущем сеансе. Последние записи в протоколе – информация, выведенная командой «Список». Например, для отрезка в окне будут показаны координаты конечных точек в ПСК, длина проекции отрезка на плоскость XU ; истинная 3D-длина; угол между проекцией отрезка на плоскость XU и осью OX , угол между отрезком и плоскостью XU .

Универсальным средством определения геометрических параметров является функциональная панель «Свойства» (см. раздел 2.4.3). При указании объекта в панели, в разделе «Геометрия», приводятся координаты, площади, углы, периметр, а для тел (солидов) – площади и объемы.

2.22. Рекомендации по созданию наглядных 3D-моделей

Придание модели наглядности с элементами дизайна является одним из критериев высокой оценки выполненной работы. Примеры наглядных моделей – см. рис. 1.1, 1.2, 1.7, 2.7. Приведем рекомендуемую последовательность построения наглядной 3D-модели средствами Платформы nanoCAD.

1. Создайте новый файл на основе приведенного выше шаблона. Для этого откройте шаблон и сохраните его с новым именем, которое соответствует содержанию 3D-модели.
2. В новом файле следует перейти в видовой экран аксонометрии, проверить, что в нем установлена МСК и визуальный стиль «Концептуальный».
3. В видовом экране выполните построения 3D-модели.

Присвойте линиям цвет. Из плоских контуров создайте области и также присвойте им цвет. Для солид-объектов можно присвоить цвет всему объекту. Командой «Редактировать тело»  можно придать различный цвет граням и ребрам солида.

4. Выделяйте цветом объект, являющийся результатом решения задачи.
5. Дополните 3D-модели проекциями объектов на координатные плоскости. Это повышает наглядность модели, ее пространственное восприятие с экрана. Как правило, достаточно к 3D-модели добавить ее проекцию на Π_1 . Для построения проекции линейных объектов (отрезков, линий, плоских фигур, областей) необходимо установить ПСК в плоскость Π_1 , создать дубликат объектов и применить к ним команду «Конвертирование в 2D» (см. раздел 5.2.1). Для моделей из солид-объектов проекции можно построить командами группы «2D-виды» (см. раздел 5.2.3). Первоначально 2D-виды построить на свободном месте, затем, разбив на линии, перенести в плоскость проекции.

Проекции можно делать из линий либо как области, имитирующие вертикальную тень «на землю». Линии проекций и области теней не должны быть яркими, чтобы не отвлекать внимание от основных объектов модели. Замкнутые проекции можно закрашивать, выполняя штриховку, или преобразовывать в области с присвоением цвета.

Стройте отрезки линий проецирования, соединяющие точки модели с соответствующими точками проекций.

Придайте линиям вес (толщину) в соответствии с назначением линии. Контуры тел, отрезки и линии, являющиеся объектами задачи, выделяйте толстыми линиями, линии построения, проецирования и проекционной связи – тонкими линиями.

6. Для отображения 3D-моделей задайте визуальный стиль «Концептуальный» или «Тонированный с кромками». Настройте плотность каркаса поверхности моделей, задав с командной строки значение системной переменной ISOLINES. Для удаления каркаса введите значение 0, для наглядного изображения – значение 6...10. После редактирования переменной выполните команду «Регенерация».
7. Настройте источники света, предусмотренные в шаблоне. При необходимости можно добавить дополнительные источники. Регулируйте их положение в пространстве и яркость (интенсивность), чтобы добиться правильного освещения модели. Важно, чтобы грани многогранников освещались по-разному, – это придает объем. Для криволинейных поверхностей (например, конуса, сферы или цилиндра) должно быть видно затемненную область – собственную тень, а также по возможности световой блик, подчеркивающий форму объекта.
8. Если модель предназначена для иллюстрации или для растрового файла презентации, то рекомендуем для повышения качества применить растровую графику программы nanoCAD [4]. Эти средства позволяют корректировать цветовое содержание изображения, резкость, вырезать фрагменты изображения, добавлять фон и т. д. Качество можно повысить, применяя средства работы с рисунками пакета Word или любого пакета растровой графики.

2.23. Модели к мультимедийной лекции 1

В этом разделе приводятся рекомендации к построению 3D-моделей для мультимедийной лекции 1 (глава 1). Все построения выполняются в шаблоне (см. раздел 2.20) согласно рекомендациям (см. раздел 2.22).

2.23.1. К рис. 1.1 «Модель отрезка»

Строим 3D-модель отрезка (рис. 1.1а, б):

- ◆ создайте новый файл на основе шаблона;
- ◆ постройте отрезок – см. раздел 2.7.2.

Построение проекции отрезка AB на плоскость Π_1 :

- ♦ выполните п. 5 раздела 2.22 – построена проекция отрезка AB ;
- ♦ постройте вертикальные отрезки проецирующих прямых. Для этого соедините отрезками конечные точки отрезка AB и соответствующие конечные точки его проекции;
- ♦ придайте отрезку проекции вес 0.5, цвет серый, например 8 или 253.

Построение чертежа отрезка (см. рис. 1.16) выполним в автоматическом режиме (см. раздел 5.2.3). Для этого из отрезка AB создадим узкие полосы поверхностей, к которым применим автоматический режим построения проекций:

- ♦ перейдите в экран вида сверху, избирательно заморозьте в нем слой « Π_1 », перейдите на резервный слой, убедитесь, что активна МСК;
- ♦ 3D-инструменты \ Прямое моделирование \ Выдавливание  \ выберите объект для выдавливания: укажите отрезок AB \ Укажите высоту выдавливания: 0.001 – построена полоска поверхности шириной 0.001;
- ♦ 3D-инструменты \ 2D-виды \ 2D Вид  \ Выберите объекты: укажите полосу поверхности \ Укажите, куда будут вставляться виды: Модель \ переместите курсор на свободное место и укажите место вставки горизонтальной проекции \ переместите курсор вверх и укажите положение фронтальной проекции – построены проекции A_1-B_1 и A_2-B_2 как основа чертежа;
- ♦ Построение \ Разбивка  \ укажите обе проекции – проекции отделены от 3D-модели;
- ♦ придайте отрезкам проекций вес 0.8;
- ♦ постройте отрезки проекционной связи A_1-A_2 и B_1-B_2 ; задайте им вес 0.3;
- ♦ Оформление \ Текст \ Одноточный текст – постройте обозначения точек на чертеже;
- ♦ сохраните файл с именем «Сравнение 2D-3D отрезок .dwg».

2.23.2. К рис. 1.2 «Модель конуса»

Строим 3D-модель:

- ♦ выполните п.п. 1, 2, раздел 2.22;
- ♦ 3D-инструменты \ Прямое \ Конус  \ Центр: 48,35,0 \ Радиус: 25 \ Высота 60 – построен конус 1;
- ♦ создайте копию конуса с перемещением 0,0,0 – построен конус 2. Конусы поместите на разных слоях и придайте им разный цвет, например 101 и 31;
- ♦ создайте дополнительный видовой экран и откройте в нем слой с конусом 2. Слой с конусом 1 в этом окне заморозьте.

Выполните разрез второго конуса:

- ♦ 3D-инструменты \ Прямое \ Прямое моделирование \ Разрез  \ укажите конус \ 3 точки \ 25,16,11 \ 47,39,36 \ 27,39,25 \ Обе – возникла линия разреза конуса;

- ♦ в режиме «ОПТО» переместите верхнюю часть конуса вертикально вдоль оси Z на 35 мм.

Придайте сечению конуса контрастный цвет:

- ♦ 3D-инструменты \ Прямое \ Редактировать тело  \ Грань – укажите плоскость сечения \ Цвет – задайте цвет сечения.

Строим чертеж конуса. Построения выполним командой «2D Вид» и поместим чертеж на Листе:

- ♦ 3D-инструменты \ 2D-виды \ 2D Вид  \ Выберите объекты: укажите конус \ Укажите, куда будут вставляться виды: А3 \ на Листе переместите курсор на свободное место и укажите место вставки горизонтальной проекции \ переместите курсор вверх и укажите положение фронтальной проекции – построены проекции конуса.
- ♦ Построение \ Разбивка  \ укажите обе проекции – проекции отделены от 3D-модели;
- ♦ постройте осевые линии. Придайте линиям чертежа необходимую толщину;
- ♦ сохраните файл с именем «Сравнение 2D-3D конус .dwg».

2.23.3. К рис. 1.3 «Методы проецирования»

Строим 3D-модель центрального проецирования (см. рис. 1.3а):

- ♦ выполните п.п. 1, 2, раздел 2.22.

За картинную плоскость примем плоскость Π_3 шаблона. Плоскости Π_1 и Π_2 не понадобятся:

- ♦ заморозьте слои с плоскостями Π_1 , Π_2 .

Построим объект проецирования – красный прямоугольник:

- ♦ Отрезок \ 46,24,43 – точка A \ 55,14,43 – точка B \ 55,14,24.5 – точка C ;
- ♦ Вид \ Координаты ПСК \ 3 точки  \ с привязкой «Конточка» укажите точку A \ точка B \ точка C – ПСК установлена в плоскости прямоугольника;
- ♦ Прямоугольник  \ с привязкой «Конточка» укажите точки A , C ;
- ♦ Вид \ Главная \ Черчение \ Область  \ укажите контур прямоугольника \ Область создана;
- ♦ присвойте области цвет «Красный» \ ОК – прямоугольник закрашен.

Проецирующие лучи:

- ♦ восстановите МСК ;
- ♦ Построение \ Точка  \ Укажите точку: 9,5.5,33.5 – поставлен маркер (крестик) в центр проецирования S ;
- ♦ Отрезок  \ Первая точка: с привязкой «Узел» укажите маркер точки S \ С объектной привязкой «Конточка» укажите вершину A – построен отрезок SA ;
- ♦ постройте отрезки SB , SC , SD .

Строим точки пересечения лучей с картинной плоскостью:

- ◆ Главная \ Редактирование \ Увеличить \ Динамика  \ указывая отрезки, удлините их перемещением курсора и продлите за эту плоскость Π_3 ;
- ◆ Вид \ Координаты \ ПСК по объекту  \ укажите плоскость Π_3 – ПСК установлена в плоскости картины;
- ◆ Копирование  \ укажите отрезки лучей \ Перемещение \ 0,0,0 – с каждым отрезком совмещен его дубликат;
- ◆ укажите отрезки \ из каждой пары совпадающих отрезков выберите по одному \ клик ПКМ \ панель «Свойства» \ в разделе «Геометрия» задайте Z-координаты концов отрезков равными 0 – построены проекции четырех отрезков на плоскость картины;
- ◆ Главная \ Полилиния  \ С привязкой «Пересечение» укажите точки пересечения лучей со своими проекциями \ Замкнуть – построен замкнутый контур проекции прямоугольника ABCD на плоскость картины;
- ◆ отрезки проекций удалите ;
- ◆ создайте область из контура проекции. Придайте ей цвет, отличающийся от картины Π_3 .

Для наглядности область проекции переместите вдоль оси Z на 0.1 мм (иначе плоскости сливаются):

- ◆ Построение \ Перемещение  \ укажите область проекции \ Перемещение \ 0,0,0.1.

Строим модель ортогонального проецирования (см. рис. 1.3б):

- ◆ скопируйте видовой экран, в котором построена модель центрального проецирования, и расположите его на Листе рядом с предыдущим экраном. Переместите отрезки лучей и проекцию на новый слой и избирательно заморозьте его в новом экране. Вернитесь на прежний слой для новой проекции;
- ◆ командой «Конвертирование в 2D» (см. раздел 5.1.2) постройте ортогональную проекцию прямоугольника, являющегося объектом проецирования, на Π_3 ;
- ◆ соединяя соответствующие вершины прямоугольника и его проекции, постройте отрезки проецирующих лучей. Удлините их в сторону условного центра проецирования;
- ◆ модели сохраните в файле «Методы проецирования .dwg».

2.23.4. К рис. 1.4 «Обратимость чертежа»

За картинную плоскость принимаем Π_3 . Построения выполните в глазомерной пропорции на основе рис. 1.4а:

- ◆ выполните п.п. 1, 2, раздел 2.22;
- ◆ установите ПСК по трем точкам плоскости Π_3 или с опцией «ПСК по объекту». Постройте в этой плоскости прямоугольник $A'B'C'D'$, который принимаем за проекцию группы объектов.

Постройте проецирующие лучи из вершин четырехугольника $A'B'C'D'$. Например, построение луча a :

- ◆ включите режим «ОРТО»;
- ◆ Отрезок \ с привязкой «Конточка» укажите точку A' \ перемещайте курсор вдоль оси Z текущей ПСК – тянется отрезок \ введите длину отрезка 145.

Плоский четырехугольник α построим как поверхность выдавливания отрезка $(A, 1)$ по траектории, задаваемой отрезком $(A, 2)$. Конечные точки отрезков задаем на лучах с объектной привязкой «Ближайшая»:

- ◆ включите объектную привязку «Ближайшая»;
- ◆ постройте отрезки $(A, 1)$ и $(A, 2)$;
- ◆ 3D-инструменты \ Прямое моделирование \ Выдавливание  \ Выберите объект для выдавливания: укажите отрезок $(A, 1)$ \ Траектория \ Выберите траекторию: укажите отрезок $(A, 2)$ – построен четырехугольник α ;
- ◆ постройте четырехугольник β выдавливанием отрезка $(K, 3)$ по траектории $(K, 4)$.

Гиперболический параболоид γ получим первоначально как поверхность, затем для наглядности модели преобразуем поверхность в солид как тонкую оболочку:

- ◆ постройте отрезки $(L, 5)$ и $(6, 7)$;
- ◆ 3D-инструменты \ Прямое моделирование \ Вытягивание по сечениям  \ Выберите поперечные сечения в порядке, требуемом для лофтинга: укажите отрезок $(L, 5)$;
- ◆ укажите отрезок $(6, 7)$ \ Только поперечные сечения – построен каркас поверхности;
- ◆ 3D-инструменты \ Прямое моделирование \ Толщина  \ Выберите поверхность для придания толщины: укажите каркас поверхности \ Укажите толщину или: 0.1.

Наглядное отображение поверхности достигается в визуальном стиле «Реалистичный».

Построение призмы δ :

- ◆ постройте треугольник $(N, M, 8)$ как замкнутую 3D-полилинию , постройте отрезок $(N, 9)$ и выдавите треугольник по траектории $(N, 9)$;
- ◆ модель сохраните в файле «Обратимость чертежа .dwg».

2.23.5. К рис. 1.6 «Построение трехпроекционного чертежа точки»

Строим модель трехпроекционного чертежа точки A (см. рис. 1.6a). Модель двухпроекционного чертежа (см. рис. 1.5) является частью этой модели:

- ◆ выполните п.п. 1, 2, раздел 2.22;
- ◆ поставьте маркер точки A с координатам МСК (42, 28, 50);

- ♦ постройте отрезки проецирующих лучей (A, A_1) , (A, A_2) , (A, A_3) . Для построения каждого из них включите режим «ОРТО», постройте отрезки произвольной длины в направлении осей МСК. Для отрезка (A, A_1) в панели «Свойства» задайте Z-координату конечной точки равной нулю. Для отрезка (A, A_2) установите ПСК по плоскости Π_2 и также задайте Z-координату конца отрезка равной нулю. Для (A, A_3) повторите действия для плоскости Π_3 ;
- ♦ применяя объектные привязки «Конточка» и «Нормаль», постройте отрезки проекционной связи (A_1, A_{12}, A_2) , (A_1, A_{13}, A_3) , (A_2, A_{23}, A_3) .

Для наглядности модели в точке A и точках проекций A_1, A_2, A_3 постройте «сферочки»:

- ♦ 3D-инструменты \ Режимы моделирования \ Прямое \ Прямое моделирование \ Сфера  \ Центр: укажите маркер точки A \ Радиус: 1.

Модель (см. рис. 1.6б) позволяет на лекции в динамике показать вращение и совмещение плоскостей и образующийся при этом чертеж точки. Для вращения плоскости Π_1 плоскость, «сферочку» в точке A_1 и отрезки (A_1, A_{12}) , (A_1, A_{13}) объединим в блок. Установим ПСК, задав X-ось как ось вращения. Выполним вращение блока как единого объекта:

- ♦ перейдите в экран аксонометрии, МСК;
- ♦ «сферочку» в точке A и отрезки проецирующих прямых (A, A_1) , (A, A_2) , (A, A_3) скройте (Изолировать \ Скрыть);
- ♦ Вставка \ Создание блока  – открылось окно «Определение блока» \ Имя: введите произвольное имя, например « Π_1 » \ Базовая точка: 0,0,0 \ Объекты \ Выбрать объекты: на экране укажите плоскость Π_1 , «сферочку» точки A_1 и отрезки (A_1, A_{12}) , (A_1, A_{13}) \ Преобразовать в блок \ ОК – объекты горизонтальной плоскости собраны в единый блок с заданным именем;
- ♦ для проверки блока укажите плоскость. Должна выделиться плоскость и все ее объекты;
- ♦ Вид \ Координаты \ Направление оси Z  \ Укажите начало ПСК: с объектной привязкой укажите точку O \ Точка на положительном луче оси Z: с объектной привязкой укажите произвольную точку оси вращения X ;
- ♦ Построение \ Редактирование \ Поворот  \ Выбор объектов: укажите объекты блока \ Базовая точка: 0,0 \ перемещая курсор, вращайте блок « Π_1 » \ зафиксируйте ряд промежуточных положений плоскости \ для конечного положения задайте угол -90° – плоскости Π_1 и Π_2 с проекциями совмещены (см. рис. 1.6б);
- ♦ для вращения плоскости Π_3 верните МСК. Создайте блок « Π_3 » из объектов плоскости Π_3 . Перенесите начало координат в точку O . Повторите вращение блока Π_3 .

Для отображения построенного чертежа в истинном виде установите в видовом экране ортогональный вид спереди:

- ♦ Вид \ Ортогональные виды \ Вид спереди .

2.23.6. К рис. 2.8 «Модель и чертеж треугольника в системе координат napoCAD»

За основу модели возьмите модель треугольника ABC (см. рис. 1.7), построение которой приведено выше в разделе 2.7.2.

- ◆ Создайте копию файла модели треугольника ABC .
- ◆ Добавьте к модели проекции треугольника на плоскости Π_2 и Π_3 (рис. 2.8а).
- ◆ Постройте три отрезка, воспроизводящих пиктограмму осей МСК. Придайте им цвет как осям МСК: синий, красный, зеленый. Объедините эти отрезки в блок. Создайте два дубликата этого блока.

Поворот плоскостей и осей:

- ◆ скройте треугольник (изолируйте или заморозьте слой, на котором он построен);
- ◆ поверните плоскость Π_1 вместе с проекцией треугольника и одним из дубликатов блока осей вокруг оси $O'X'$ на 90° – получено положение осей МСК, которое они занимают на чертеже на виде сверху;
- ◆ поверните плоскость Π_3 вместе с проекцией и вторым дубликатом осей МСК вокруг оси $O'Z'$ на 90° – получено положение осей МСК на чертеже на виде слева;
- ◆ верните плоскости Π_1, Π_3 в исходное положение;
- ◆ сохраните модель в файле «Модель осей МСК на чертеже .dwg».

ГЛАВА 3

Взаимное положение точек, прямых и плоскостей (лекция 2)

Точка, прямая линия и плоскость – это абстрактные объекты, операции над которыми существенно развивают пространственное мышление. Это простейшие геометрические примитивы, на которых осваивается техника геометрического моделирования.

В этой лекции рассмотрим термины, характеризующие взаимное положение точек, прямых линий и плоскостей, методы построения этих объектов в заданном взаимном положении, а также методы определения взаимного положения этих объектов по 3D-модели и по чертежу.

3.1. Взаимное положение точек относительно координатных плоскостей

Взаимное положение точек можно рассматривать относительно плоскости, прямой линии или любой поверхности. Начнем с анализа положения точек относительно плоскости.

Для оценки взаимного положения точек относительно произвольной плоскости достаточно по 3D-модели плоскости установить в плоскость систему координат ПСК, определить координаты точек и сравнить значения Z -координат. Точка, имеющая абсолютное значение Z -координаты больше, чем у другой точки, расположена от плоскости дальше другой (и наоборот). Если Z -координата точки равна нулю, точка принадлежит плоскости. Если Z -координаты двух точек имеют разный знак, то точки расположены по разные стороны от плоскости.

Рассмотрим частный случай, важный для нашего курса, – взаимное положение двух точек относительно координатных плоскостей Π_1, Π_2, Π_3 . Ограничимся случаем, когда обе точки расположены по одну сторону от плоскости и рассматриваются в системе координат МСК.

Относительно горизонтальной плоскости Π_1 точка может быть выше или ниже другой точки, над ней или под ней. Будем различать понятия «выше» и «над», а также «ниже» и «под».

Выше расположена точка, у которой значение Z -координаты больше. Если дополнительно X, Y -координаты сопоставляемых точек соответственно равны между собой, то точка с большей Z -координатой расположена над другой.

Точки, проекции которых на плоскость совпадают, называются *конкурирующими*. Они конкурируют за место своей проекции на плоскости. Если совпадают X, Y -координаты на Π_1 , то точки называют *горизонтально конкурирующими*. У них на плоскости Π_1 совпадают горизонтальные проекции.

Например, точка G (рис. 3.1) расположена *выше* точки C , точки D и C – горизонтально конкурирующие, причем точка D расположена *над* точкой C .

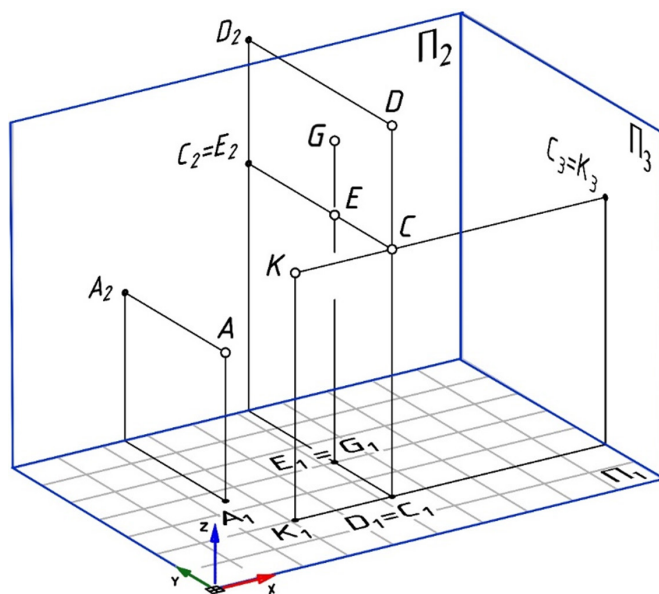


Рис. 3.1. Взаимное положение точек

При решении задач положение точек бывает необходимо характеризовать с позиции наблюдателя, расположенного над точками. При такой оценке точка G ближе к наблюдателю, чем точка C . Точка D остается конкурирующей с точкой C и расположена ближе к наблюдателю, чем точка C .

Относительно фронтальной плоскости Π_2 точка может быть расположена ближе или дальше другой точки, перед точкой или за ней. Оценим положение точек, как их видит наблюдатель, расположенный перед ними. Точка C (см. рис. 3.1) ближе к наблюдателю (и дальше от плоскости Π_2), чем точки A, E, G . Точки C и D расположены на равном расстоянии от Π_2 или от наблюдателя. Точки C и E на плоскость Π_2 проецируются в одну точку и являются фронтально конкурирующими, причем точка C расположена перед точкой E .

Относительно профильной плоскости Π_3 взаимное положение точек определяется как «левее» или «правее». Точки A и K расположены левее точек C, E, G . Точки C, E, G расположены на равном расстоянии от плоскости Π_3 . Проекции точек K и C на Π_3 совпадают, поэтому эти точки профильно конкурирующие.

Уточним термин «конкурирующие точки» – это точки, проекции которых на плоскость совпадают. Если совпадают горизонтальные проекции, точки в МСК имеют одинаковые X, Y -координаты и называются «горизонтально конкурирующие». При совпадении фронтальных проекций (совпадение X, Z -координат) – «фронтально конкурирующие». Если точки отображаются в единую проекцию на виде слева (совпадение Y, Z -координат) – «профильно конкурирующие».

- Лектору: в шаблоне поставить точку $C(50, 20, 50)$ в МСК. Ортогональным копированием построить конкурирующие с ней точки D, E, K , показанные на рис. 3.1. Дать название точек относительно точки C .

3.2. Взаимное положение точки и прямой линии

Точка может *принадлежать* прямой линии или быть *вне* прямой. Если точка не принадлежит прямой, т. е. расположена *вне* прямой, то ее положение можно уточнить относительно координатных плоскостей. Относительно горизонтальной плоскости Π_1 точка может быть *выше* или *ниже* прямой, *над* прямой или *под* прямой. Относительно фронтальной плоскости Π_2 точка может быть *ближе* или *дальше* прямой, располагаться *перед* или *за* прямой. Относительно профильной плоскости положение точки характеризуется как *левее* или *правее* прямой. Рассмотрим оценку взаимного положения точки и прямой по 3D-модели и по чертежу.

3.2.1. Определение взаимного положения точки и прямой по 3D-модели

Пусть построен отрезок AB и набор точек $K...G$ (рис. 3.2а), отмеченных маркерами. Также построены их горизонтальные проекции. Задача: определить пространственное положение этих точек относительно отрезка AB в пространстве.

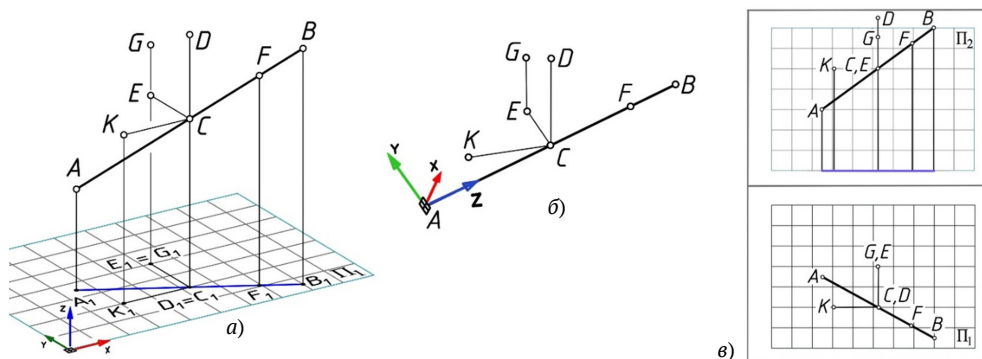


Рис. 3.2. Взаимное положение точек и прямых:
 а – 3D-модель; б – принадлежность точки прямой линии;
 в – экраны ортогональных видов

Точки C и F принадлежат отрезку AB . В первом приближении в этом можно убедиться визуально, осматривая 3D-модели отрезка и точек с разных сторон в окне аксонометрии. Для точного определения следует установить ПСК осью Z вдоль прямой (рис. 3.2б) и командой «Коорд», «Список» или в панели «Свойства» определить координаты точки. Координаты выводятся в ПСК. Для точек, принадлежащих прямой, вдоль которой направлена Z -ось, X, Y -координаты будут равны нулю. Иначе точка находится вне прямой.

Для точек, расположенных вне прямой, можно уточнить их взаимное положение относительно координатных плоскостей. Уточним взаимное положение точек и прямой относительно плоскости Π_1 (см. рис. 3.2).

Определение: точка расположена над прямой, если она имеет на этой прямой горизонтально конкурирующую точку и ее Z -координата больше, чем у конкурирующей точки.

Примером точки, расположенной над прямой, является точка D , имеющая на этой прямой горизонтально конкурирующую точку C .

Точки G, K , не имеющие горизонтально конкурирующих точек на прямой AB , расположены выше прямой (но не над прямой). Для точки E при оценке относительно Π_1 можно ограничиться выводом, что она вне прямой.

Аналогичные выводы о взаимном положении точки и прямой можно сделать относительно плоскостей проекций Π_2 и Π_3 . Например, точки C и E – фронтально конкурирующие, при этом точка E расположена за точкой C . Поскольку точка C принадлежит прямой AB , то точка F расположена за прямой AB . Точки G, K не имеют фронтально конкурирующих точек на прямой AB . С учетом их горизонтальных проекций можно уточнить, что точка G расположена ближе к Π_2 , чем прямая AB , а точка K – дальше от Π_2 , чем та же прямая.

Относительно плоскости Π_3 точка K имеет профильно конкурирующую с ней точку C , принадлежащую прямой AB . Поэтому относительно плоскости Π_3 точка K расположена левее, чем прямая AB . О точках D, G можно ограничиться выводом, что они дальше от плоскости Π_3 , чем прямая AB .

Вывод о взаимном положении точек, а также точки и прямой можно сделать по ортогональным видам (рис. 3.2в). Положение относительно плоскостей Π_1 и Π_3 наглядно отображается на виде спереди, а относительно Π_2 и Π_3 – на виде сверху. Например, по виду спереди делаем вывод, что точки K, G, D расположены выше прямой AB . По виду сверху следует вывод, что точка K расположена ближе и левее прямой AB , а точки G, E – дальше прямой и ближе к Π_3 .

Совпадение точек C и F с прямой AB на двух видах – спереди и сверху – указывает, что эти точки принадлежат прямой AB .

Построение 3D-модели точек и прямой заданного взаимного положения приведено в разделе 4.1.

○ Лектору:

- откройте файл «Точка и прямая .dwg» (см. раздел 4.1); покажите и поясните положение точек относительно прямой;
- постройте произвольный отрезок AB . С объектной привязкой «Ближайшая» постройте точку C на этом отрезке. Ортогональным копированием постройте ряд точек «за, над, слева, выше...».

3.2.2. Определение взаимного положения точки и прямой по чертежу

Рассмотрим чертеж точек и отрезка AB (рис. 3.3), модель которых приведена выше (см. рис. 3.2). Чертеж содержит три проекции. Проекции повторяют изображения в соответствующих им видовых окнах. Например, горизонтальная проекция повторяет изображение в окне вида сверху; фронтальная проекция – в окне вида спереди (см. рис. 3.2в). На чертеже добавлена третья проекция – профильная, которая повторяет изображение в видовом окне вида слева.

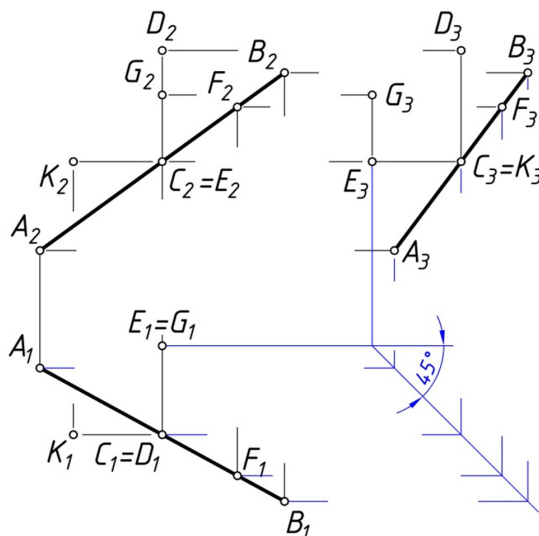


Рис. 3.3. Чертеж точек и отрезка прямой линии

Из условия обратимости чертежа (см. раздел 1.4.4) следует: «Точка принадлежит прямой, если на двух проекциях чертежа проекции точки принадлежат проекциям прямой». Примерами точек, принадлежащих прямой AB , являются точки C и F , поскольку горизонтальные проекции этих точек C_1, F_1 принадлежат горизонтальной проекции прямой – A_1B_1 , фронтальные проекции C_2, F_2 принадлежат фронтальной проекции прямой – A_2B_2 .

Так как две проекции обеспечивают обратимость чертежа, то на любой другой проекции совпадение проекций происходит автоматически. Это совпадение видим на плоскости Π_3 , где точки C_3, F_3 совпадают с отрезком A_3B_3 .

Если совпадение проекций точки и прямой имеет место только на одной плоскости, то вывод о взаимном положении следует уточнить по проекциям другой плоскости. Например, для точки D и отрезка AB совпадают только горизонтальные проекции D_1 и A_1B_1 . На фронтальной и профильной плоскостях проекции точек не совпадают. По положению проекций D_2 и A_2B_2 или D_3 и A_3B_3 видим, что точка D расположена *над* отрезком AB и *левее* этого отрезка.

Для точки E и отрезка AB видим совпадение фронтальных проекций E_2 и A_2B_2 . По горизонтальным проекциям E_1 и A_1B_1 делаем вывод, что точка E относитель-

но наблюдателя расположена *за* отрезком или *ближе* к плоскости Π_2 , а также эта точка расположена *справа* от отрезка.

Для точки G нет проекций, совпадающих с проекциями отрезка AB . По взаимному положению проекций делаем вывод, что точка G не принадлежит отрезку AB , расположена выше, дальше и правее отрезка AB .

Построение чертежа (рис. 3.3) приведено в приложении (см. раздел 4.3).

- Лектору: поясните раздел 4.2 «Определение взаимного положения точек по координатам» и раздел 4.3 «Построение чертежа точек и отрезка прямой линии».

3.3. Прямые общего и частного положения

Прямая линия, не имеющая особенностей в положении относительно координатных плоскостей, называется *прямой общего положения*. Однако в конструкциях деталей, узлов машин зданий и сооружений преобладают прямые линии, имеющие особенности своего положения, например линии вертикальные или горизонтальные. Их называют *прямыми частного положения*. В этом разделе рассмотрим свойства, особенности построения 3D-моделей и чертежей таких прямых.

3.3.1. Термины и определения прямых

Приняты следующие термины, обозначающие положение прямых линий относительно плоскостей проекций.

Прямая общего положения – не параллельная и не перпендикулярная ни одной из плоскостей проекций Π_1 , Π_2 , Π_3 .

Прямые, параллельные или перпендикулярные плоскостям проекций, называют *прямыми частного положения*. Они подразделяются на *прямые уровня* и *проецирующие прямые*.

Прямая уровня – параллельная одной из плоскостей проекций. Различают *горизонталь* – параллельную Π_1 , *фронталь* – параллельную Π_2 , *профильную прямую* – параллельную Π_3 .

Проецирующая прямая – перпендикулярная одной из плоскостей проекций. В зависимости от плоскости проекций различают *горизонтально проецирующую*, *фронтально проецирующую* и *профильно проецирующую* прямые.

3.3.2. Прямая общего положения

Примером отрезка прямой общего положения является отрезок AB . Его 3D-модель – см. рис. 3.2, чертеж – см. рис. 3.3. Изучим свойства такого отрезка, определяемые средствами nanoCAD.

Наиболее полно геометрические параметры отрезка показывает команда «Список» (см. раздел 2.21). В списке данных, выводимых этой командой (рис. 3.4а), видим координаты начальной и конечной точек отрезка, приведены разности одноименных координат точек, например дельта X . Параметр «В текущей ПСК, Длина» – это длина проекции отрезка на плоскость XY . Характерными при-

наками отрезка прямой общего положения являются его угловые параметры, которые оба отличаются от нуля. Угол в плоскости XY – это угол проекции отрезка, построенной на плоскость XY , с осью X (угол α , см. рис. 2.5). Угол от плоскости XY – это угол наклона отрезка к плоскости XY , т. е. это угол между отрезком и его проекцией на плоскость (угол β , см. рис. 2.5). 3D-Длина – истинная длина отрезка. Все координаты и угловые параметры приводятся в текущей ПСК (в данном примере – в МСК).

LINE			
Пространство:	Пространство модели		
Слой:	"0"		
Указатель:	1023		
Масштаб типа линий:	1.00		
Начальная точка:	X = 25.00	Y = 35.00	Z = 30.00
Конечная точка:	X = 80.00	Y = 5.00	Z = 70.00
Смещение относительно ПСК			
В текущей ПСК, Длина:	62.65		
Угол в плоскости XY:	331.4		
Угол от плоскости XY:	32.6		
3D Длина:	74.33		
Дельта X:	55.00		
Дельта Y:	-30.00		
Дельта Z:	40.00		

а)

Свойства	
Объекты	Отрезок
Общие	+
3D-визуализация	+
Геометрия	-
Начало X	25
Начало Y	35
Начало Z	30
Конец X	80
Конец Y	5
Конец Z	70
Дельта X	55
Дельта Y	-30
Дельта Z	40
Длина	74.33
Угол	331.4

б)

Рис. 3.4. Информация по отрезку общего положения:
а – список данных; б – панель «Свойства»

Основные параметры отрезка можно узнать в функциональной панели «Свойства», где значения отображаются также в ПСК (рис. 3.4б).

Построение модели отрезка AB приведено в разделе 4.1. Построение чертежа – в разделе 4.3.

- Лектору: постройте какой-либо отрезок общего положения, выведите список данных и покажите параметры отрезка в панели «Свойства».

3.3.3. 3D-модели прямых уровня

На рис. 3.5 показаны 3D-модели прямых, каждая из которых параллельна одной из плоскостей проекций. Для наглядности отрезки построены из общей точки A и построены проекции этих прямых на плоскость Π_1 .

Рассмотрим прямую h , параллельную горизонтальной плоскости проекций Π_1 . Это горизонтальная прямая уровня (или ее краткое название – горизонталь). Горизонталь принято обозначать h (*horizontal*). Из условия параллельности плоскости Π_1 вытекают следующие свойства горизонтали:

- 1) конечные точки отрезка горизонтали имеют равные значения Z -координат или разность Z -координат (дельта Z) конечных точек равна нулю;

- 2) угол наклона горизонтали к плоскости Π_1 равен нулю, эта прямая параллельна и равна (конгруэнтна) своей ортогональной проекции на Π_1 .

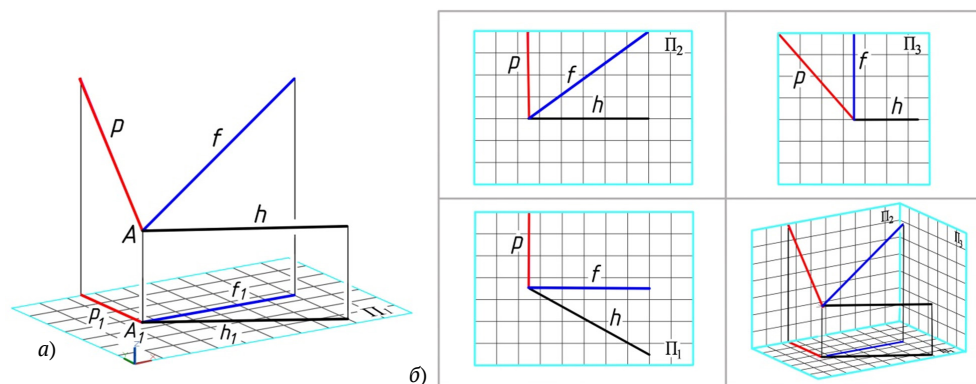


Рис. 3.5. Модели прямых уровня: а – 3D-модели; б – видовые окна

На рис. 3.6 приведена информация по отрезку горизонтали h , показанного на рис. 3.5а. Значения параметров приведены в МСК. В частности, приведены координаты конечных точек и углы отрезка с плоскостями проекций. Видим, что значения Z -координат концов отрезка равны между собой или значение «Дельта $Z = 0$ », что является признаком горизонтали. Приведена длина отрезка, равная 62.65. Это одновременно длина проекции отрезка и его истинная 3D-длина, поэтому параметр «3D Длина» не приводится. Приведен угол в плоскости XY , равный 331.3895° , – это угол α отрезка с осью X , измеренный против часовой стрелки. Угол горизонтали с плоскостью XOY отсутствует, это означает, что он равен нулю.

LINE			
Пространство:	Пространство модели		
Слой:	"Прямые уровня"		
Указатель:	77d		
Масштаб типа линий:	1.00		
Начальная точка:	X = 25.00	Y = 35.00	Z = 30.00
Конечная точка:	X = 80.00	Y = 5.00	Z = 30.00
Длина:	62.65		
Угол в плоскости XY:	331.3895		
Дельта X:	55.00		
Дельта Y:	-30.00		
Дельта Z:	0.00		

а)

Свойства	
Объекты	Отрезок
Общие	+
3D-визуализация	+
Геометрия	-
Начало X	25.00
Начало Y	35.00
Начало Z	30.00
Конец X	80.00
Конец Y	5.00
Конец Z	30.00
Дельта X	55.00
Дельта Y	-30.00
Дельта Z	0.00
Длина	62.65
Угол	331.3895

б)

Рис. 3.6. Информация по отрезку горизонтали, выводимая командой «Список» (а) и в панели «Свойства» (б)

- Лектору: по приведенным на рис. 3.6а координатам постройте отрезок горизонтали. Поясните значения параметров, показанные командой «Список» и в панели «Свойства».

Фронтальная прямая, или кратко *фронталь*, будучи параллельной Π_2 , имеет в МСК равные между собой значения Y -координат конечных точек отрезка. Для фронтالي принято обозначение f (*frontal*).

Информация по отрезку фронтали, выводимая командой «Список» (рис. 3.7а), содержит следующие характерные признаки фронтали: равенство Y -координат или «Дельта $Y = 0$ »; угол в плоскости $XY = 0$, это угол между горизонтальной проекцией фронтали с осью X ; угол от плоскости $XY = 36.3^\circ$ – это значение угла β (см. рис. 2.5).

LINE Пространство: Пространство модели Слой: "Прямые уровня" Указатель: 7d4 Масштаб типа линий: 1.00 Начальная точка: X = 25.00 Y = 35.00 Z = 30.00 Конечная точка: X = 80.00 Y = 35.00 Z = 70.00 Смещение относительно ПСК В текущей ПСК, Длина: 55.00 Угол в плоскости XY: .00 Угол от плоскости XY: 36.03 3D Длина: 68.01 Дельта X: 55.00 Дельта Y: 0.00 Дельта Z: 40.00			
а)			
LINE Пространство: Пространство модели Слой: "Прямые уровня" Указатель: 7d7 Масштаб типа линий: 1.00 Начальная точка: X = 25.00 Y = 35.00 Z = 30.00 Конечная точка: X = 25.00 Y = 70.00 Z = 70.00 Смещение относительно ПСК В текущей ПСК, Длина: 35.00 Угол в плоскости XY: 90.00 Угол от плоскости XY: 48.81 3D Длина: 53.15 Дельта X: 0.00 Дельта Y: 35.00 Дельта Z: 40.00			
б)			

Рис. 3.7. Информация, выводимая командой «Список» по отрезкам фронтали (а) и профильной прямой (б)

Профильная прямая как параллельная Π_3 имеет равные значения X -координат конечных точек ее отрезка. Эту прямую принято обозначать p (*profile line*).

Информация, выводимая командой «Список» по отрезку профильной прямой (рис. 3.7б), отражает признаки этой прямой: равенство X -координат конечных точек отрезка и угол в плоскости $XY = 90^\circ$ (т. е. перпендикулярность горизонтальной проекции отрезка с осью X). «Угол от плоскости = 48.83° » – это угол β между отрезком и плоскостью $ХОУ$.

Повторим, что параметры приведены в МСК. При изменении системы координат прямые, 3D-модели которых приведены на рис. 3.5, уже не будут являться прямыми уровня и обладать рассмотренными выше свойствами.

Построение моделей прямых уровня приведено в разделе 4.4.1.

○ Лектору:

- откройте файл «Прямые уровня .dwg» (см. раздел 4.4.1). Поясните модели прямых уровня;
- по приведенным на рис. 3.7а, б координатам постройте отрезки фронтоли и профильной прямой. Командой «Список» и в панели «Свойства» покажите их параметры.

3.3.4. Чертежи прямых уровня

Рассмотрим, как свойства прямых уровня отражаются на ортогональном чертеже этих прямых (рис. 3.8). Чертеж построен для отрезков h, f, p (см. рис. 3.5а). Наглядное представление о чертеже дает изображения этих отрезков в окнах ортогональных видов (рис. 3.5б).

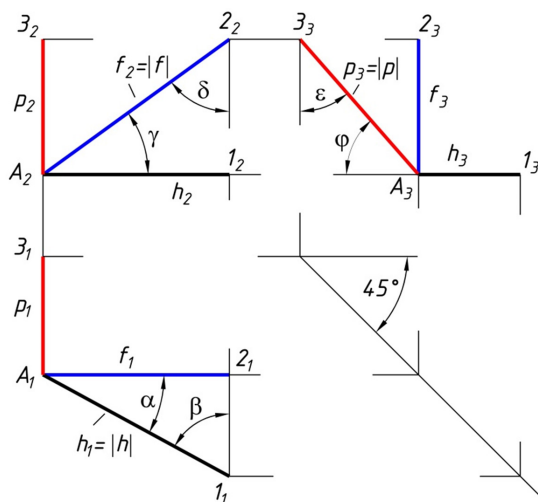


Рис. 3.8. Чертеж прямых уровня

1. *Проекции отрезков прямых уровня на плоскости, им параллельные, конгруэнтны этим отрезкам, т. е. отрезок при наложении совпадает со своей проекцией на эту плоскость. Из этого следует, что длина проекции отрезка прямой уровня на параллельную ей плоскость совпадает с его истинной длиной. Например, длина проекции отрезка горизонтали h_1 равна 3D-длине отрезка h горизонтали. Для отображения этого (см. рис. 3.8) применим запись $h_1 = |h|$. Аналогично для фронтоли $f_2 = |f|$ и профильной прямой $p_3 = |p|$.*
2. *На плоскости, параллельной прямой уровня, углы между прямой и двумя другими плоскостями отображаются в истинном виде. Например, угол α равен углу горизонтали h с плоскостью Π_2 , угол β – с плоскостью Π_3 . Углы γ и δ равны углам фронтоли f с плоскостями Π_1 и Π_3 . Углы ϕ и ϵ равны углам между профильной прямой p и плоскостями Π_1 и Π_2 .*

Последовательность построения этого чертежа приведена в разделе 4.4.2.

○ Лектору:

- покажите раздел приложения 4.4.2 «Последовательность построения чертежа прямых уровня» и прокомментируйте технику построения чертежа;
- на чертеже покажите проекции, длина которых равна истинной величине отрезков;
- покажите углы с плоскостями проекций, отображаемые в истинном виде.

3.3.5. 3D-модели и чертежи проецирующих прямых

На рис. 3.9а показано изображение 3D-моделей отрезков трех проецирующих прямых, т. е. прямых, каждая из которых перпендикулярна одной из плоскостей проекций. Для наглядности отрезки построены из одной точки и добавлены их проекции на плоскости проекций. На рис. 3.9б приведен чертеж этих прямых.

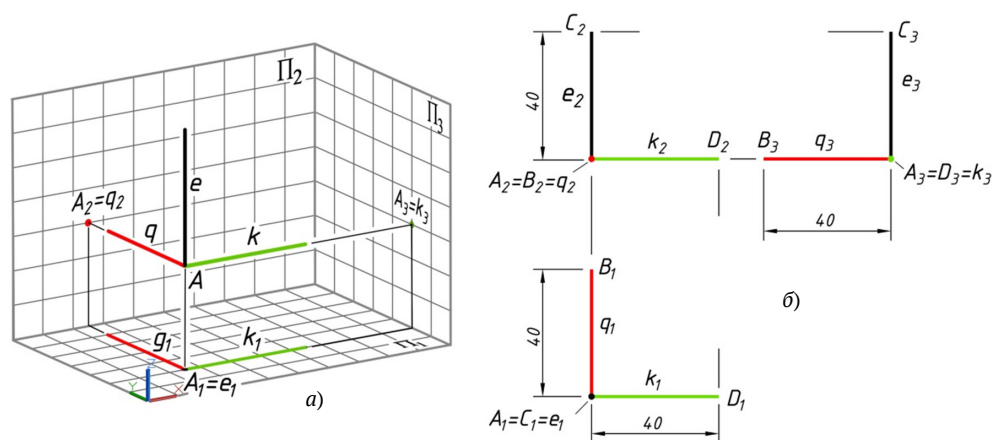


Рис. 3.9. Прямые проецирующие: а – 3D-модель; б – чертеж

Рассмотрим свойства проецирующих прямых, которые вытекают из информации, полученной командой «Список», и из чертежа этих прямых.

Например, горизонтально проецирующая прямая e имеет следующие признаки (рис. 3.10а), вытекающие из определения этой прямой как перпендикулярной плоскости Π_1 (т. е. перпендикулярной плоскости XOY системы МСК): равенство X, Y -координат конечных точек отрезка или «Дельта $X = 0$ » и «Дельта $Y = 0$ ». Параметр «3D Длина» отрезка равен «Дельта Z ». «Угол от плоскости $XOY = 90$ или 270 » – это зависит от направления отрезка. Угол в плоскости отсутствует, поскольку отрезок перпендикулярен плоскости XOY .

Свойства двух других проецирующих прямых – фронтально и профильно проецирующей – показаны на рис. 3.10б, в. Они аналогичны свойствам горизонтально проецирующей прямой. Обобщим эти свойства.

1. На плоскость, перпендикулярную проецирующей прямой, эта прямая отображается в точку. Например, горизонтально проецирующая прямая e отображается в точку e_1 .

2. Точки отрезка проецирующей прямой называют *конкурирующими* (т. е. конкурируют за место на плоскости, см. также раздел 3.1). Например, точки *A, C* (см. рис. 3.9б) – горизонтально конкурирующие, так как их горизонтальные проекции совпадают. Точки *A, B* – фронтально конкурирующие, точки *A, D* – профильно конкурирующие.
3. Прямая, проецирующая относительно одной из плоскостей проекций, параллельна двум другим плоскостям проекций. Следовательно, на эти две плоскости проецирующая прямая отображается в истинном виде. Например, горизонтально проецирующая прямая, перпендикулярная Π_1 , параллельна плоскостям Π_2 и Π_3 .

Построение 3D-моделей проецирующих прямых приведено в разделе 4.4.3.

LINE Пространство: Пространство модели Слой: "Проецирующие прямые" Указатель: 831 Масштаб типа линий: 1.00 Начальная точка: X = 25.00 Y = 20.00 Z = 30.00 Конечная точка: X = 25.00 Y = 20.00 Z = 70.00 Угол от плоскости XY: 90.0000 3D Длина: 40.00 Дельта X: 0.00 Дельта Y: 0.00 Дельта Z: 40.00	LINE Пространство: Пространство модели Слой: "Проецирующие прямые" Указатель: 831 Масштаб типа линий: 1.00 Начальная точка: X = 25.00 Y = 20.00 Z = 30.00 Конечная точка: X = 25.00 Y = 60.00 Z = 30.00 Длина: 40.00 Угол в плоскости XY: 90.0000 Дельта X: 0.00 Дельта Y: 40.00 Дельта Z: 0.00	LINE Пространство: Пространство модели Слой: "Проецирующие прямые" Указатель: 831 Масштаб типа линий: 1.00 Начальная точка: X = 25.00 Y = 20.00 Z = 30.00 Конечная точка: X = 25.00 Y = 60.00 Z = 30.00 Длина: 40.00 Угол в плоскости XY: 90.0000 Дельта X: 0.00 Дельта Y: 40.00 Дельта Z: 0.00
--	--	--

а)

б)

в)

Рис. 3.10. Информация по отрезкам проецирующих прямых, выводимая командой «Список»: *а* – горизонтально проецирующая; *б* – фронтально проецирующая; *в* – профильно проецирующая

- Лектору:
 - откройте файл «Проецирующие прямые .dwg» (см раздел 4.4.3). Поясните построение и свойства этих прямых;
 - из точки (25, 20, 30) постройте 3D-модели отрезков трех проецирующих прямых, задав длину каждого из них 40 мм;
 - командой «Список» покажите параметры одной из прямых.

3.4. Взаимное положение прямых

Из школьного курса геометрии вам известно, что возможны три варианта взаимного положения прямых. Прямые могут быть параллельными, пересекающимися, скрещивающимися. В нашем курсе рассмотрим определение взаимного положения прямых по 3D-модели и по чертежу, а также особенности

построения 3D-моделей и особенности чертежей прямых различного взаимного пространственного положения.

3.4.1. Определение взаимного положения прямых по 3D-модели

Определение взаимного положения прямых рассмотрим на примере 3D-модели отрезков a , b , c (рис. 3.11).

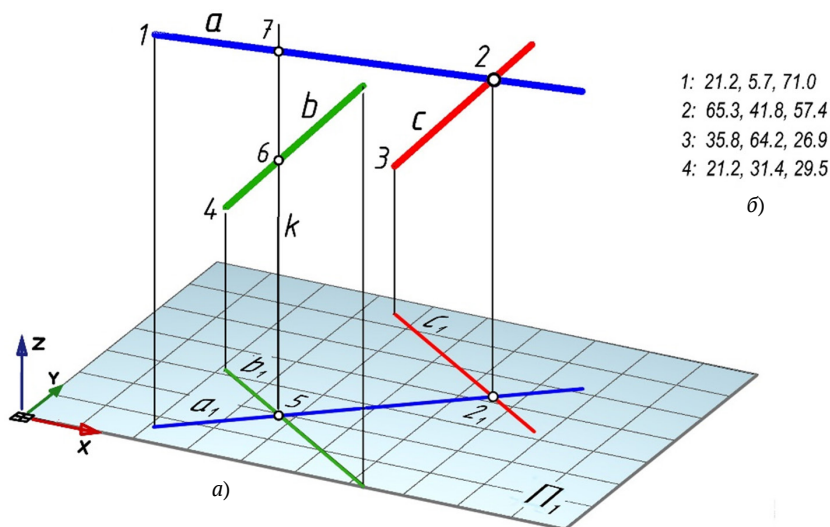


Рис. 3.11. Взаимное положение прямых:
 a – 3D-модель; b – координаты точек в МСК

Приближенная визуальная оценка

Взаимное положение отрезков можно определить визуально, выполняя вращение, панорамирование (перемещением) и зуммирование (увеличение-уменьшение) изображения.

Установите направление взгляда вдоль одного из отрезков, например вдоль отрезка a , – этот отрезок стал виден как точка. Если при этом второй отрезок, например b , виден как отрезок и между изображениями отрезков есть расстояние, то a и b – отрезки скрещивающихся прямых.

Взаимное положение скрещивающихся прямых можно визуально уточнить: какая прямая над другой или перед ней (см. ниже раздел 3.4.3).

Если отрезок a , видимый как точка, совпадает с изображением второго отрезка, например отрезка c , или с продолжением этого отрезка, то a и c – отрезки пересекающихся прямых.

Если при вращении изображения отрезки сохраняют взаимную параллельность, то они параллельны между собой. На рис. 3.11 это отрезки b и c .

Построение модели, показанной на рис. 3.11, приведено в разделе 4.5.1.

- Лектору: откройте файл «Взаимное положение прямых .dwg» (см. раздел 4.5.1) и визуально определите взаимное положение отрезков *a*, *b*, *c*.

Точная оценка взаимного положения прямых

Визуальная оценка является приближенной. В нашем курсе требуется точная оценка. Точной будем считать оценку с точностью до 10^{-8} , с которой выполняются построения и измерения в Платформе nanoCAD.

Сделать точный вывод о пересечении прямых можно, если в месте проверяемого пересечения отрезков применить команду «Точка» с объектной привязкой «Пересечение». Платформа nanoCAD анализирует положение отрезков в месте, указанном курсором. Если есть пересечение, то рядом с курсором возникнет сообщение «Пересечение». Иначе прямые скрещивающиеся. Подробнее – см. раздел 4.6.

Проверка параллельности прямых основана на том, что такие прямые имеют равный наклон к любой плоскости и равный угол, образованный проекциями этих прямых на плоскость и произвольной прямой в этой плоскости (см. углы α , β , рис. 2.5). Значения этих углов, измеренные относительно плоскости XOY и оси X текущей ПСК, выводит команда «Список». Поэтому для проверки параллельности следует к паре отрезков применить команду «Список» и сравнить значения двух угловых параметров отрезка. Если соответствующие углы попарно равны (либо являются взаимно дополнительными), то отрезки параллельны. Подробнее о проверке параллельности см. в разделе 4.6.

Поскольку параллельность прямых определяется равенством их угловых параметров, то для точности 3D-построений параллельные прямые следует строить **только** копированием. При этом автоматически обеспечивается равенство угловых параметров прямых и их отрезков. Построения отрезков по координатам их конечных точек, как правило, не обеспечивает такого равенства и приводит к ошибке в виде отклонения от параллельности из-за недостаточной точности ввода значений координат.

Для оценки скрещивающихся прямых следует проверить, есть ли пересечение отрезков постановкой точки с привязкой «Пересечение». Если проверка не выявила пересечения, то прямые скрещиваются.

- Лектору:
 - в файле «Взаимное положение прямых .dwg» по модели отрезков *a*, *c* покажите действие объектной привязки «Пересечение»;
 - для отрезков *b*, *c* примените команду «Список». В текстовом окне покажите «Угол в плоскости $XU = \dots$ » и «Угол от плоскости $XU = \dots$ » и покажите, что эти углы попарно равны.

Кажущееся пересечение скрещивающихся прямых

Изображение скрещивающихся прямых на экране может создавать иллюзию пересечения этих прямых. Такое пересечение названо «кажущимся». В Платформе nanoCAD предусмотрена объектная привязка «Кажущееся пересечение», которая позволяет найти точки скрещивающихся прямых в месте кажущегося пересечения. Точки определяются как конкурирующие относительно плоско-

сти экрана. Эта привязка позволяет упростить решение задач со скрещивающимися прямыми. В частности, позволяет определять взаимное положение скрещивающихся прямых относительно плоскостей проекций (см. раздел 4.7).

- Лектору: вращая 3D-модель из файла «Взаимное положение прямых .dwg», покажите кажущееся пересечение отрезков a , b . Покажите действие привязки «Кажущееся пересечение». Постройте прямую k , перпендикулярную Π_1 и пересекающую a , b .

3.4.2. Определение взаимного положения прямых по чертежу

Из условия обратимости чертежа следует, что взаимное положение прямых определяется по взаимному положению двух одноименных проекций. Рассмотрим в качестве примера чертеж прямых a , b , c (рис. 3.12а) и на основе чертежа определим взаимное положение этих прямых.

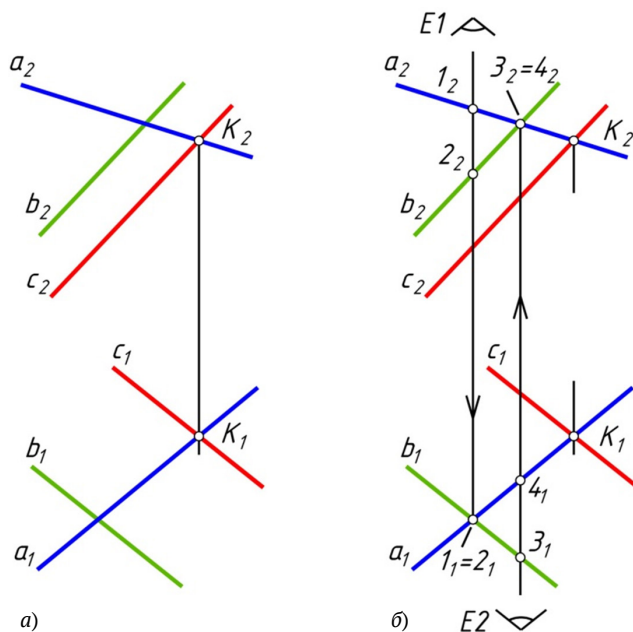


Рис. 3.12. Определение взаимного положения прямых по чертежу:
а – чертеж; б – метод конкурирующих точек

Если одноименные проекции прямых пересекаются и точки пересечения проекций на разных координатных плоскостях принадлежат одной линии связи, то, согласно свойству эпюра Монжа, эти точки являются проекциями единой точки пространства, общей для каждой из прямых. Следовательно, такие прямые имеют общую точку, т. е. в пространстве они пересекаются. На чертеже (см. рис. 3.12а) общую точку K имеют прямые a и c , следовательно, прямые a и c пересекаются. Принята сокращенная запись пересекающихся прямых, например $a \cap c$.

Если одноименные проекции прямых пересекаются, но точки пересечения разных проекций НЕ принадлежат единой линии связи, то эти прямые не име-

ют общей точки, т. е. скрещиваются. Такими (рис. 3.12а) являются прямые a, b . Точки пересечения их одноименных проекций не принадлежат единой вертикальной линии связи. Сокращенная запись скрещивающихся прямых: $a \div b$.

Если одноименные проекции прямых на двух различных плоскостях попарно параллельны, то такие прямые в пространстве параллельны между собой. Символ параллельности: $\parallel$. Такими являются прямые $b \parallel c$ (см. рис. 3.12а), для которых $b_1 \parallel c_1$ и $b_2 \parallel c_2$.

Построение чертежа (рис. 3.12) в автоматическом режиме приведено в разделе 4.5.1.

3.4.3. Взаимное положение скрещивающихся прямых.

Метод конкурирующих точек

Взаимное положение двух скрещивающихся прямых требует уточнения: какая из них расположена над (или под) другой и какая – перед (или за). Такой вывод выполняется относительно координатных плоскостей. Рассмотрим, как этот вывод сделать по 3D-модели и по чертежу.

Определение по 3D-модели

Приближенную визуальную оценку можно сделать, если вращать изображение 3D-модели вместе с координатными плоскостями шаблона или ориентироваться на пиктограмму МСК. Например, в модели (см. рис. 3.13) можно увидеть, что прямая a расположена над прямой b , а прямая b расположена перед ней.

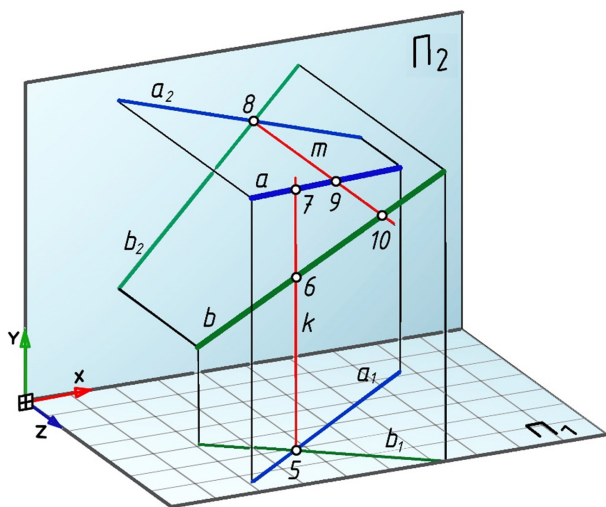


Рис. 3.13. Взаимное положение скрещивающихся прямых

Для точного вывода следует построить проецирующий отрезок, определить конкурирующие точки и их взаимное положение. Проецирующий отрезок можно построить, применив привязку «Кажущееся пересечение» (см. выше) относительно плоскости или восстановить перпендикуляр из точки пересечения проекций прямых до пересечения с этими прямыми. Построение проецирующих отрезков с привязкой «Кажущееся пересечение» более «экономично», поскольку не требует предварительного построения проекций отрезков.

На рис. 3.13 показана оценка взаимного положения скрещивающихся прямых a и b . Это те же прямые, что приведены на рис. 3.11. Для оценки их положения относительно Π_1 построены проекции отрезков на эту плоскость, из точки 5 построен отрезок k как перпендикуляр к Π_1 . На пересечении с отрезками a и b он определяет горизонтально конкурирующие точки 6, 7. Поскольку точка 7 расположена над точкой 6, то следует вывод, что отрезок a расположен над отрезком b . Для оценки положения относительно Π_2 построены фронтальные проекции отрезков, из точки 8 восстановлен перпендикуляр m к Π_2 и определены фронтально конкурирующие точки 9, 10. Поскольку точка 10 расположена ближе к наблюдателю, то следует вывод, что отрезок b расположен перед отрезком a .

Построение модели, приведенной на рис. 3.13, рассмотрено в разделе 4.5.1.

- Лектору: показать взаимное положение скрещивающихся отрезков a и b по 3D-модели из файла «Скрещивающиеся прямые .dwg» (см. раздел 4.5.1).

Определение по чертежу

Более сложным для восприятия является определение взаимного положения скрещивающихся прямых на основе чертежа. Здесь применяют разработанный в начертательной геометрии «метод конкурирующих точек». Вернемся к чертежу, приведенному выше, на рис. 3.12б.

Представим наблюдателя, взгляд которого направлен сверху вниз на плоскость Π_1 (показан символ глаза $E1$). Наблюдатель видит пересечение прямых как пересечение их проекций a_1 и b_1 . Поскольку сами прямые не пересекаются, то в точке пересечения проекций совпадают проекции двух горизонтально конкурирующих точек, обозначим их $1_1 = 2_1$. Предположим, что точка 1 принадлежит прямой a , точка 2 – прямой b . По фронтальным проекциям точек видно, что точка 1 расположена над точкой 2. Из этого следует вывод: «прямая a расположена над прямой b ». Равнозначным является вывод «прямая b расположена под прямой a ».

Наблюдатель (символ $E2$), взгляд которого направлен вперед, на плоскость Π_2 , видит пересечение прямых как пересечение их проекций a_2 и b_2 . В точке пересечения совпадают проекции фронтально конкурирующих точек 3_2 и 4_2 . Предположим, что точка 3 принадлежит прямой b , точка 4 – прямой a . По горизонтальным проекциям видим, что точка 3 расположена ближе к наблюдателю, поэтому следует вывод: «прямая b расположена перед прямой a », или «прямая a расположена за прямой b ».

3.5. Принадлежность точки и прямой линии плоскости

Плоскость – поверхность, содержащая полностью каждую прямую, соединяющую любые ее точки (определение по «Википедии»). Более строгое определение: плоскость – это множество (геометрическое место) точек, в котором все точки прямой линии, соединяющей любые две точки множества, также принадлежат этому множеству. То есть определение плоскости дается через вывод о принадлежности точек и прямых плоскости. Рассмотрим алгоритмы определения этой принадлежности.

3.5.1. Задание плоскости

Задать плоскость – это означает сформулировать условия, позволяющие для любой точки пространства сделать вывод: точка принадлежит плоскости или находится вне плоскости. Плоскость может быть наглядно задана как 3D-модель. Можно задать ее как 2D-модель, т. е. как чертеж.

Основной вариант задания плоскости – тремя точками, не принадлежащими одной прямой. То есть если в пространстве или на чертеже построены три точки, то для любой другой точки пространства можно сделать вывод, принадлежит ли она множеству, обладающему свойством плоскости, определяемому первыми тремя точками. О том, как это сделать, см. ниже, разделы 3.5.2, 3.5.3.

Как следствие основного варианта возможен ряд вариантов задания плоскости. Например, если по двум точкам из трех заданных построить прямую, то она вместе с оставшейся точкой также задает плоскость. По трем точкам можно построить две пересекающиеся прямые и определить ими плоскость – этот вариант в режиме 3D показан на рис. 3.14а, где плоскость Σ задана отрезками a и c прямых, пересекающихся в точке K . Чертеж этой плоскости приведен на рис. 3.14б.

Если по двум точкам из трех заданных провести прямую и через третью точку – еще прямую, параллельную первой, то две параллельные прямые также определяют плоскость. 3D-модель плоскости Δ , заданной параллельными прямыми b и c , показана на рис. 3.13в, чертеж плоскости – см. рис. 3.13г.

Построив треугольник, вершины которого определены тремя точками, получим плоскость, заданную треугольником. Любая плоская фигура, например окружность или грань многогранника, также определяют плоскость.

Построение моделей плоскостей, приведенных на рис. 3.14, рассмотрено в разделе 4.8.1.

- Лектору: откройте файл «Плоскости 3D .dwg» (см. раздел 4.8.1) и покажите различные варианты задания плоскости как 3D-модели на чертеже.

3.5.2. Определение принадлежности по 3D-модели

Точка может принадлежать плоскости или быть вне ее. Прямая линия может принадлежать плоскости, пересекать ее или быть параллельной плоскости.

Рассмотрим, как определить взаимное положение точки и прямой относительно плоскости по 3D-модели и по чертежу.

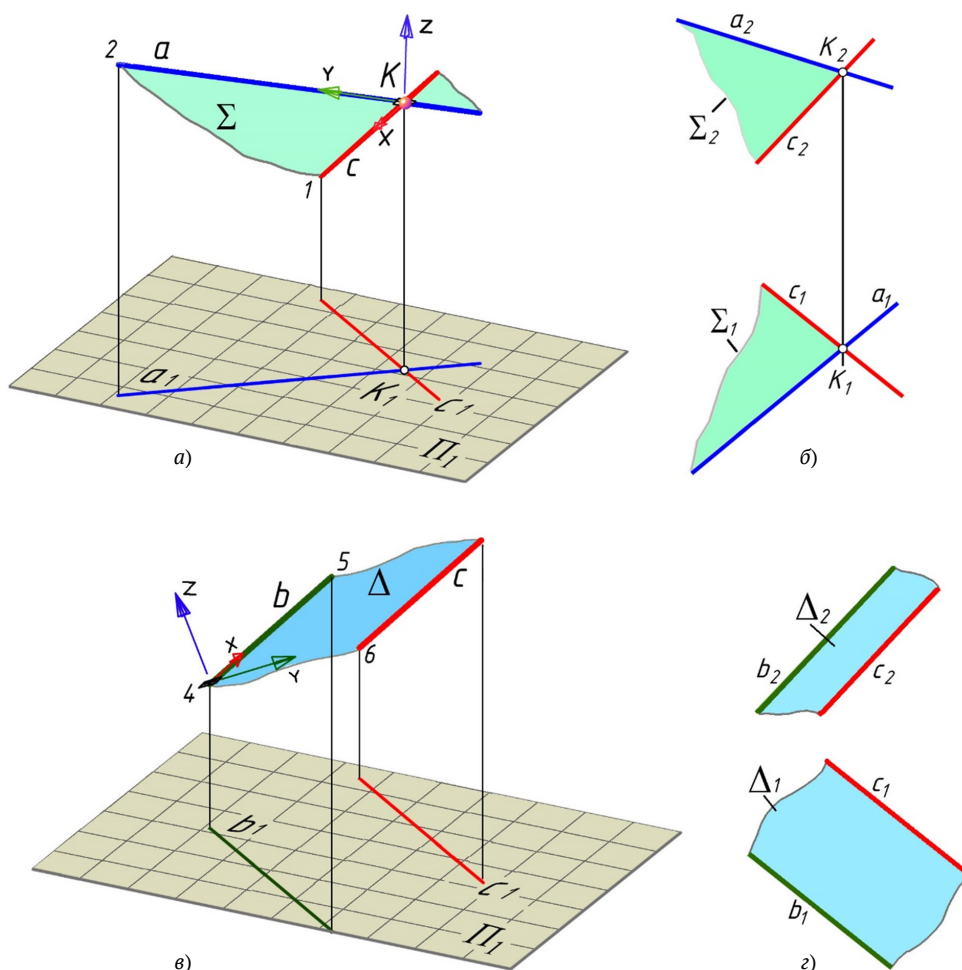


Рис. 3.14. 3D-модели и чертежи плоскости:
 а, б – заданной двумя пересекающимися прямыми;
 в, г – двумя параллельными прямыми

Для того чтобы по 3D-модели определить принадлежность точки плоскости, достаточно установить ПСК в плоскость, относительно которой определяется положение точки, и, применив одну из команд («Коорд», «Список») или панель «Свойства», определить Z-координату точки. Если $Z = 0$, то точка принадлежит плоскости. Иначе находится вне этой плоскости.

Для отрезка прямой линии нужно также установить ПСК в плоскость и командой «Список» определить Z-координаты каких-либо двух точек этого отрезка. На рис. 3.14а показаны оси ПСК, установленной в плоскость Σ по точкам K , 1 , 2 . Для плоскости Δ (рис. 3.14в) ПСК установлена по точкам 4 , 5 , 6 .

Возможны три варианта значений Z -координат точек отрезка, измеренных в ПСК:

- 1) Z -координаты двух точек равны нулю – прямая принадлежит плоскости;
- 2) Z -координаты двух точек прямой равны между собой, но не равны нулю – прямая параллельна плоскости;
- 3) Z -координаты различны по величине – прямая пересекает плоскость, причем если обе Z -координаты имеют одинаковый знак, то отрезок прямой расположен по одну сторону от плоскости, иначе отрезок пересекает плоскость.

○ Лектору:

- открыть файл «Плоскости 3D .dwg». В одной из плоскостей построить два произвольных отрезка. В режиме «ОПТО» переместить конечные точки одного из отрезков вдоль оси Z на различные расстояния;
- применив к отрезкам команду «Список», показать, что один отрезок принадлежит плоскости, а второй – ее пересекает.

3.5.3. Определение принадлежности по чертежу.

Недостающая проекция точки

На чертеже определение принадлежности точки плоскости и прямой плоскости выполняется на основе следующих геометрических положений:

- 1) *точка принадлежит плоскости, если она принадлежит какой-либо прямой, находящейся в этой плоскости;*
- 2) *прямая линия принадлежит плоскости, если ее две точки принадлежат этой плоскости.*

Пусть (рис. 3.15а) плоскость α задана пересекающимися прямыми a и b . Заданы две точки A, B . Сделать вывод о принадлежности этих точек плоскости.

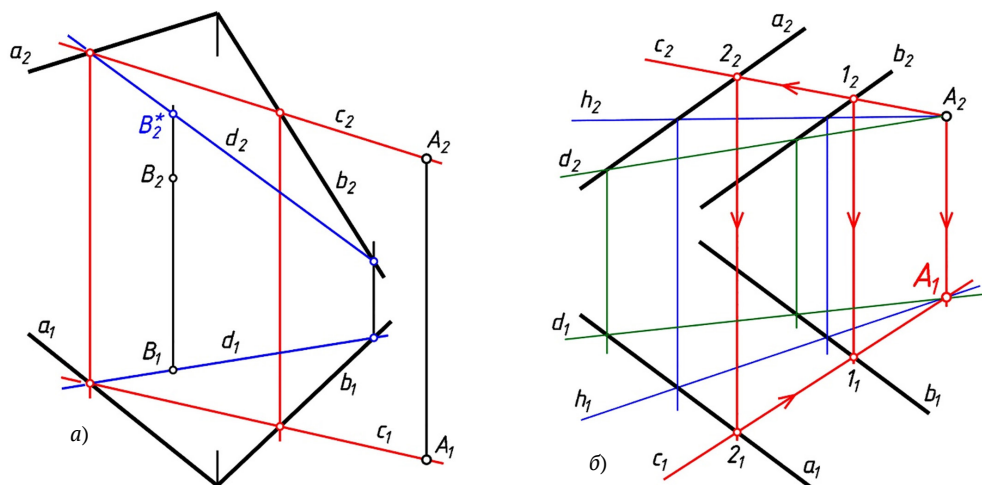


Рис. 3.15. Принадлежность точки плоскости. Алгоритм НГ:
 а – проверка принадлежности; б – построение недостающей проекции

Алгоритм для точки A :

- 1) через фронтальную проекцию проверяемой точки A , точку A_2 , проведем фронтальную проекцию вспомогательной прямой c – прямую c_2 . Эту прямую можно провести произвольно, но требуется, чтобы она проходила через точку A_2 ;
- 2) определяем точки 1_2 и 2_2 как пересечение проекций прямых a_2, b_2, c_2 ;
- 3) построим горизонтальную проекцию прямой c – прямую c_1 при условии, что прямая c принадлежит плоскости α . Для этого по проекционной связи находим точки 1_1 и 2_1 и по ним строим c_1 ;
- 4) убеждаемся, что горизонтальная проекция проверяемой точки A , точка A_1 , принадлежит горизонтальной проекции прямой c_1 . Поскольку две проекции точки A принадлежат проекциям прямой c , то точка принадлежит этой прямой. Но прямая c принадлежит плоскости α , следовательно, точка A также принадлежит плоскости α .

Возможно бесконечное количество вариантов решения задачи о принадлежности точки плоскости. Во-первых, прямую c_2 , проходящую через точку A_2 , можно провести произвольно. Во-вторых, построения можно начинать не с фронтальной, а с горизонтальной проекции вспомогательной прямой, т. е. построить c_1 , затем по точкам $1, 2$ строить c_2 и по ней проверять проекцию A_2 . Но вывод будет однозначным: точка A принадлежит плоскости.

Алгоритм для точки B . Положение точки B определяем с помощью вспомогательной прямой d , горизонтальную проекцию которой, d_1 , проводим через точку B_1 . Строим фронтальную проекцию прямой d . Видим, что фронтальная проекция d_2 не проходит через точку B_2 . Следовательно, точка B не принадлежит прямой d и не принадлежит плоскости α .

Задача о принадлежности точки плоскости может быть сформулирована иначе: *по заданной проекции точки определить ее недостающую проекцию при условии, что точка принадлежит плоскости*. Например, задана проекция A_2 , необходимо определить A_1 (см. рис. 3.15а). Выполняем построения по приведенному выше алгоритму проверки точки A , по п. 4 на прямой c_1 по проекционной связи находим точку A_1 .

На рис. 3.15б задана плоскость β ($a \parallel b$) и фронтальная проекция точки A – точка A_2 . Требуется найти горизонтальную проекцию этой точки A при условии, что точка принадлежит плоскости β . Из точки A_2 проведена произвольная прямая c_2 , по проекционной связи построена ее горизонтальная проекция c_1 , и также по проекционной связи найдена искомая горизонтальная проекция A_1 . Для наглядности показаны еще два варианта решения, с помощью прямых h и d . Они и все другие возможные варианты приводят к единственному решению – точке A_1 .

- Лектору: построить чертеж (см. рис. 3.15) и показать, как определить положение точки A относительно плоскости.

3.5.4. Положение плоскости относительно координатных плоскостей проекций

Относительно координатных плоскостей Π_1, Π_2, Π_3 плоскость может занимать общее или частное положение. Рассмотрим термины и примеры на 3D-моделях плоскостей.

Плоскость общего положения не имеет особенностей пространственного положения. Если такая плоскость представлена плоской фигурой, например треугольником α (рис. 3.16а), то проекции этого треугольника на координатные плоскости Π_1, Π_2, Π_3 также треугольники $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

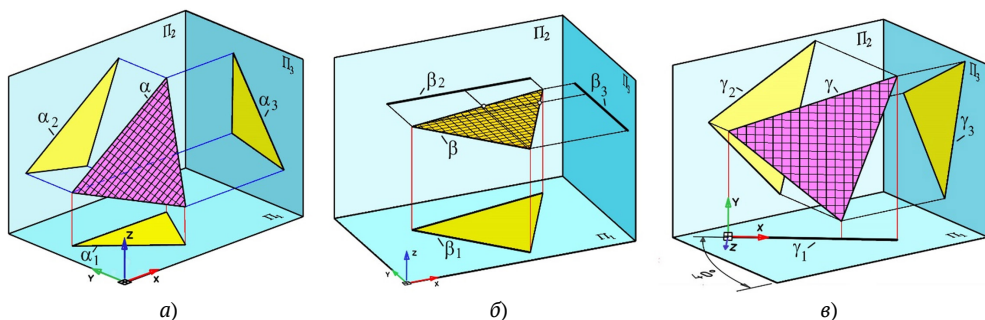


Рис. 3.16. Пространственное положение плоскостей:

а – плоскость общего положения; б – горизонтальная плоскость уровня;
в – горизонтально проецирующая плоскость

Плоскости уровня – параллельные одной из координатных плоскостей проекций Π_1, Π_2, Π_3 . Название плоскости уровня дается по координатной плоскости. Например, горизонтальная плоскость уровня параллельна Π_1 , фронтальная плоскость уровня параллельна Π_2 , профильная плоскость уровня параллельна Π_3 .

Отметим два свойства плоскостей уровня.

1. Плоская фигура, изображенная в плоскости уровня, при наложении совпадает со своей проекцией на координатную плоскость, которой плоскость уровня параллельна. Такое свойство называют «конгруэнтность».
2. На две другие координатные плоскости плоскость уровня отображается в виде прямых линий, поскольку она им перпендикулярна.

Примером является горизонтальная плоскость уровня β (рис. 3.16б). Треугольник этой плоскости на плоскости Π_2, Π_3 отображается в виде отрезков прямых линий.

Проецирующие плоскости – перпендикулярные одной из координатных плоскостей, которая определяет название проецирующей плоскости. Например, плоскость, перпендикулярная горизонтальной плоскости проекций Π_1 , называется *горизонтально проецирующей*. Подобным образом определяются *фронтально проецирующая* и *профильно проецирующая* плоскости.

Свойства проецирующих плоскостей.

1. Плоская фигура, построенная в проецирующей плоскости, отображается на координатную плоскость, перпендикулярную проецирующей плоскости, в виде отрезков прямых. Вся плоскость отображается в виде прямой линии.
2. На координатной плоскости, перпендикулярной проецирующей плоскости, двугранные углы между проецирующей плоскостью и двумя другими координатными плоскостями отображаются в истинном виде, как линейные значения двугранных углов.
3. На две другие координатные плоскости проецирующая плоскость отображается в виде плоскостей, а плоская фигура отображается в свою проекцию на эту плоскость.

Примером является горизонтально проецирующая плоскость γ (рис. 3.16в). На плоскость Π_1 треугольник, построенный в этой плоскости, отображается в виде трех совпадающих отрезков прямых линий γ_1 . На две другие плоскости – как треугольники γ_2, γ_3 . Показан угол между плоскостью γ и плоскостью Π_2 (40°).

Построение моделей плоскостей приведено в разделе 4.8.2.

- Лектору: откройте файл «Пространственное положение плоскостей .dwg» (см. раздел 4.8.2). Покажите плоскости различного пространственного положения и их свойства.

3.6. Параллельность прямой и плоскости, двух плоскостей

Задачи на параллельность прямой и плоскости решаются на основе следующих геометрических положений:

- 1) *прямая параллельна плоскости, если она параллельна какой-либо прямой этой плоскости, иначе она пересекает эту плоскость;*
- 2) *плоскость параллельна данной прямой, если она содержит прямую, параллельную данной;*
- 3) *две плоскости параллельны, если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости.*

3.6.1. Задачи на параллельность, решаемые по 3D-модели

Рассмотрим примеры задач на параллельность, решаемых методами 3D.

Определить, параллелен ли отрезок прямой плоскости. Установить ПСК в плоскость и сравнить Z-координаты концов отрезка. Если они равны, то отрезок параллелен плоскости, как и вся прямая, частью которой является отрезок. Иначе отрезок пересекает плоскость (явно или на своем продолжении).

Определить, параллельны ли между собой две заданные плоскости. Установить ПСК в одну из плоскостей. Построить в ней (или найти ранее построенные) два отрезка пересекающихся прямых. Проверить параллельность каждого отрезка

по отношению ко второй плоскости. Если оба отрезка параллельны плоскости, то взаимно параллельны и обе плоскости.

Построить прямую, параллельную заданной плоскости, проходящую через заданную точку. Установить ПСК в плоскость и построить в ней отрезок, затем с объектной привязкой скопировать отрезок в заданную точку.

Задать плоскость, параллельную заданной плоскости, проходящую через заданную точку. Установить ПСК в заданную плоскость и перенести начало координат ПСК в заданную точку. Зафиксировать найденную плоскость, построив в ней, например, два отрезка пересекающихся прямых.

Построить треугольник, параллельный заданному $\Delta(ABC)$, на расстоянии 30 мм. Решение показано на рис. 3.17. Построение этой модели приведено в разделе 4.8.3.

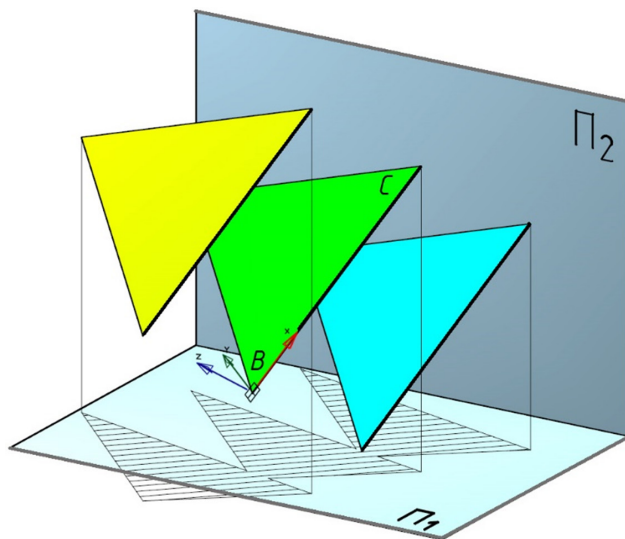


Рис. 3.17. Пример параллельных плоскостей

- Лектору: откройте файл «Треугольники 3D .dwg» (см. раздел 4.8.3) и покажите модель треугольников. Подтвердите параллельность треугольников и расстояние между ними.

3.6.2. Параллельность плоскостей на чертеже

Рассмотрим пример задачи на параллельность, решаемую на проекционном чертеже (рис. 3.18а): *построить плоскость β , параллельную плоскости $\alpha(a, A)$ и проходящую через точку B .*

Плоскость α задана точкой A и отрезком прямой линии a . Решение (рис. 3.18б) выполним, учитывая условие параллельности плоскостей и прямых. Из точки A построим отрезок прямой b , пересекающей прямую a в произвольной точке. Искомую плоскость β зададим двумя прямыми a' и b' , пересекающимися в точке B и соответственно параллельными прямым a и b ($a' \parallel a$ и $b' \parallel b$).

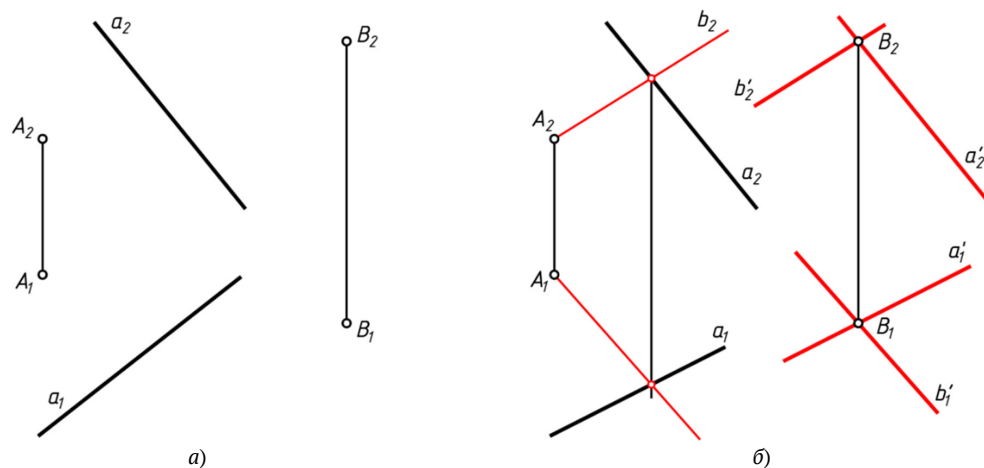


Рис. 3.18. Построение чертежа плоскости, параллельной заданной плоскости:
 a – дано; $б$ – решение

- Лектору: пояснить решение задачи (рис. 3.17). Объяснить, что возможна единственная плоскость, удовлетворяющая условию задач, но вариантов задания этой плоскости бесконечное множество.

Вопросы для самоконтроля

1. В чем отличие терминов: «Точка A расположена выше точки B » и «Точка A расположена над точкой B »?
2. Какими терминами характеризуется взаимное положение точки и прямой относительно фронтальной плоскости?
3. Как по координатам точек определить их взаимное положение? Привести примеры.
4. Сферическая и цилиндрическая системы координат. Абсолютные и относительные координаты. Привести примеры задания точек в различных системах координат в nanoCAD'e.
5. Как по 3D-модели определить длину отрезка прямой и углы наклона отрезка к плоскостям проекций?
6. Дать определение прямых уровня. Уметь построить их 3D-модели и чертежи.
7. Основные свойства прямых уровня. Показать на примере одной из прямых.
8. Дать определение проецирующих прямых. Уметь построить их 3D-модели и чертежи.
9. Основные свойства проецирующих прямых. Что называют конкурирующими точками? Привести пример на 3D-модели и чертеже.
10. Как на 3D-модели и на чертеже определить, что прямые пересекаются?
11. Как на 3D-модели и на чертеже определить, что прямые параллельны? Особенности построения 3D-модели параллельных прямых.

12. Как на 3D-модели и на чертеже определить, что прямые скрещиваются?
13. Что такое кажущееся пересечение прямых? К каким прямым оно применимо?
14. Как характеризуется взаимное положение двух скрещивающихся прямых относительно координатных плоскостей?
15. Как на чертеже определить взаимное положение двух скрещивающихся прямых? Как называется метод такого определения?
16. Как по 3D-модели определить принадлежность точки и прямой плоскости?
17. Как классифицируются плоскости в зависимости от их положения относительно координатных плоскостей $\Pi_1 \dots \Pi_3$? Привести примеры задания плоскостей на чертеже.
18. Свойства плоскостей уровня. Задать плоскость уровня на чертеже и на 3D-модели.
19. Свойства проецирующих плоскостей. Задать проецирующую плоскость на чертеже и на 3D-модели.
20. Как на чертеже построить точку в заданной плоскости?
21. Как на чертеже построить прямую в заданной плоскости?
22. Как по 3D-модели определить взаимное положение точки и плоскости, а также отрезка и плоскости?
23. Как на чертеже определить взаимное положение точки и прямой относительно плоскости?
24. Как построить плоскость, параллельную заданной плоскости, в 3D-модели и на чертеже?

ГЛАВА 4

Приложение к лекции 2: Взаимное положение точек, прямых и плоскостей

Приведены дополнительные материалы к лекции 2. Рассмотрены команды Платформы nanoCAD и примеры решения задач по теме лекции. Приведены рекомендации по построению моделей для мультимедийной лекции.

4.1. Построение 3D-модели точек различного положения относительно прямой

Рассмотрим примеры построения точек 3D-модели согласно рис. 3.2а. Координаты точек приведены в МСК.

- ◆ Создайте новый файл на основе шаблона.

Постройте 3D-модель отрезка AB , если координаты точки A (25, 35, 30), а точка B расположена правее точки A на 55 мм, выше на 40 мм и ближе к наблюдателю на 30 мм:

- ◆ Построение \ Отрезок  \ Первая точка: 25,35,30 \ Укажите следующую точку: @55,-30,40.

Постройте точку C как среднюю точку отрезка AB :

- ◆ Построение \ Точка  \ Укажите точку: *Shift* + ПКМ «Середина», укажите отрезок AB – проставлен маркер точки C в середине отрезка AB .

Постройте точку D , расположенную над точкой C на расстоянии 25 мм:

- ◆ включите режим ортогонального перемещения «ОРТО»;
- ◆ Построение \ Копирование  \ Выбор объектов: с привязкой «Узел» укажите маркер точки C \ Базовая точка: повторно укажите маркер точки C \ курсором буксируйте маркер вертикально вверх, направление контролируйте по линии трассировки \ с клавиатуры введите 25 – построен маркер точки D .

Постройте точку E , расположенную за точкой C на 20 мм:

- ♦ повторите ортогональное копирование точки C в направлении оси Y на 20 мм.

Постройте точку E , принадлежащую отрезку AB , на расстоянии 60 мм от точки A .

Особенность построения этой точки в том, что заданное расстояние измеряется вдоль отрезка AB . Поэтому следует установить систему координат ПСК, задав ее начало в точке A и направив ось Z вдоль отрезка AB . Затем либо применить ортогональное перемещение маркера точки A , как в приведенных выше примерах, либо поставить маркер точки с координатами (0, 0, 60):

- ♦ Вид \ Координаты \ Направление оси Z  \ Укажите новую начальную точку: с объектной привязкой «Конечная» укажите точку A \ Точка на положительном луче оси Z : с той же привязкой укажите точку B – ПСК установлена вдоль отрезка с началом в точке A (см. рис. 3.2б);
- ♦ Точка  \ 0,0,60 – построен маркер точки F .

Постройте точку G , расположенную над точкой E на расстоянии 15 мм:

- ♦ установите (верните) МСК;
- ♦ копируйте маркер точки E в режиме «ОРТО» вдоль оси Z , вверх на 15 мм.

Постройте точку K , профилльно конкурирующую с точкой C и расположенную левее точки C на 7.5 мм.

- ♦ Установите МСК;
- ♦ копируйте точку C ортогонально влево на 20 мм.

Построения показаны на рис. 3.2а. Для наглядности командой «Конвертирование в 2D» построены горизонтальные проекции отрезка AB и точек $C...K$ на плоскость Π_1 , а также построены отрезки проецирующих прямых от названных точек на плоскость Π_1 .

- ♦ Сохраните построения в файле «Точка и прямая .dwg».

4.2. Определение взаимного положения точек по координатам

Вывод о взаимном положении точек можно сделать по сопоставлению их координат, которые можно определить командами «Коорд», «Список» или в панели «Свойства». Рассмотрим примеры. Пусть заданы точки $Q(10, 20, 30)$, $L(10, 20, 50)$, $M(10, 50, 30)$, $N(50, 20, 30)$. Координаты точек даны в МСК. Необходимо определить взаимное положение точек и их положение относительно координатных плоскостей.

Точки Q и L имеют одинаковые X, Y -координаты. Это *горизонтально конкурирующие* точки. Поскольку Z -координата точки L больше, следовательно, точка L расположена *над* точкой Q .

Точки Q и M имеют одинаковые X, Z -координаты. Это *фронтально конкурирующие* точки. Видим также, что Y -координата точки M больше, чем у точки Q . Учи-

тывая, что координаты определены в МСК, делаем вывод, что точка M расположена ближе к плоскости Π_2 или дальше от наблюдателя, чем точка Q .

Точки Q и N имеют одинаковые Y, Z -координаты. Это *профильно конкурирующие* точки. При этом X -координата точки N больше. Следовательно, точка N расположена *правее* точки Q .

Точки M и N не имеют общих пар координат, т. е. не являются конкурирующими по отношению к любой из трех координатных плоскостей. Точка M расположена левее, дальше от наблюдателя и на одной высоте с точкой N .

4.3. Построение чертежа точек и отрезка прямой

Рассмотрим построение чертежа отрезка AB прямой общего положения (рис. 4.1). 3D-модель отрезка приведена на рис. 3.2. Координаты точек отрезка приведены при выполнении команды его построения (см. раздел 4.1).

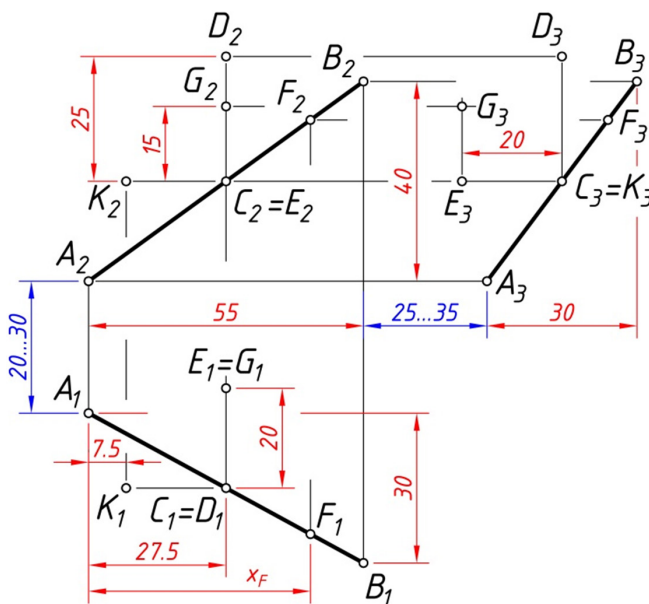


Рис. 4.1. Построение чертежа точек и отрезка прямой линии

Чертеж выполняется в рабочей тетради или в nanoCAD в плоскости XOY системы МСК. Первоначально с учетом размещения чертежа назначаем базовую точку и наносим ее проекции в проекционной связи. Относительно базовой точки строим проекции остальных точек модели (рис. 4.1). Последовательность построения следующая:

- 1) выберем в качестве базовой точку A и построим три ее проекции. Рекомендуемое расстояние между проекциями показано размерами синего цвета 20...30 и 25...35;
- 2) построим точки B_1, B_2, B_3 по размерам 55, 30, 40;

- 3) соединив точки одноименных проекций, получим проекции отрезка A_1B_1 , A_2B_2 , A_3B_3 ;
- 4) делением A_1B_1 пополам построим точку C_1 . По линиям связи построим C_2 и C_3 ;
- 5) по размеру 25 построим D_2 . По линиям связи построим D_3 ;
- 6) по размеру 20 построим E_1 и E_3 ;
- 7) по размеру 15 построим точку G_2 , по линиям связи и размеру 20 построим G_3 ;
- 8) по размеру 7.5 и горизонтальной линии связи построим точку K_1 , по линиям связи построим точки K_2 , K_3 .

Для построения точки F в начертательной геометрии применяют способ прямоугольного треугольника. Мы его рассмотрим в разделе 7.2.3. Сейчас воспользуемся предварительно построенной 3D-моделью (см. раздел 4.1) и определим координаты точки F по модели:

- 9) в файле 3D-модели перенесем начало координат в точку A и командой «Кoord» определим относительные координаты точки $F(xF, yF, zF)$;
- 10) по координате xF построим точку F_1 . По линиям связи построим F_2 , F_3 .

4.4. Построение 3D-моделей и чертежей прямых частного положения

- ◆ Создайте новый файл на основе шаблона.

4.4.1. 3D-модели прямых уровня

Рассмотрим последовательность построения 3D-моделей отрезков прямых уровня, показанных на рис. 3.5. Построения выполним в МСК, в относительных координатах.

Построение горизонтали:

из точки $A(25, 35, 30)$ постройте отрезок горизонтали h , если его вторая конечная точка имеет приращения декартовых координат $(55, -30, 0)$:

- ◆ Построение \ Отрезок  \ Первая точка: 25,35,30 \ Укажите следующую точку: @55,-30,0 – построен отрезок h (рис. 3.5а);
- ◆ выполните команду «Список» или в панели «Свойства» убедитесь в совпадении результатов с приведенными на рис. 3.6.

Построение отрезка фронтали. Рассмотрим два примера отрезка фронтали:

из точки $A(25, 35, 30)$ постройте отрезок фронтали f , если его вторая конечная точка имеет приращения декартовых координат в МСК $(55, 0, 40)$:

- ◆ Отрезок \ 25,35,30 \ @55,0,40 – построен отрезок f (рис. 3.5а);
- ◆ выполните команду «Список» или в панели «Свойства» убедитесь в совпадении результатов с приведенными на рис. 3.7а.

Из точки $A(25, 35, 30)$ постройте отрезок фронтали f , если его длина равна 65, угол к горизонтальной плоскости равен 35° .

Если в качестве параметров отрезка фронтали заданы его длина и угол к плоскости, то следует применить относительные сферические координаты (см. рис. 2.5б). Угол с осью X для фронтали равен 0:

- ◆ Отрезок \ 25,35,30 \ @65<0<35.

Для профильной прямой приведем также два примера построения:

из точки $A(25, 35, 30)$ постройте отрезок профильной прямой p , если его вторая конечная точка имеет приращения декартовых координат $(0, 35, 40)$:

- ◆ Отрезок \ 25,35,30 \ @0,35,40 – построен отрезок профильной прямой p (рис. 3.5б);
- ◆ выполните команду «Список» или в панели «Свойства» убедитесь в совпадении результатов с приведенными на рис. 3.7б.

Второй пример построения отрезка профильной прямой:

из точки $A(25, 35, 30)$ постройте отрезок профильной прямой p длиной 50 с углом к горизонтальной плоскости 45° .

Вторую точку отрезка зададим в относительных сферических координатах. Учитываем, что с осью X горизонтальная проекция профильной прямой имеет угол 90° :

- ◆ Отрезок \ 25,35,30 \ @50<90<45;
- ◆ сохраните модели в файле «Прямые уровня.dwg».

4.4.2. Последовательность построения чертежа прямых уровня

Рассмотрим построение чертежа отрезков прямых уровня (рис. 4.2), если предварительно построена 3D-модель этих отрезков (см. рис. 3.5). Чертеж выполним в безопасном варианте, для которого необходимы разности координат конечных точек отрезков. Эти разности определим по параметрам моделей, выводимым командой «Список» (см. рис. 3.6 и 3.7). Например, для отрезка фронтали f_2 на чертеже (рис. 4.2) размер 40 определен как разность высот «Дельта Z: 40.00» (см. рис. 3.7а).

- ◆ В качестве базовой точки выбираем точку A . Соблюдая проекционную связь, наносим точки A_1, A_2, A_3 . Расстояние между этими точками, показанные размерами синего цвета, задаем с учетом размеров проекций и размещения чертежа в выделенной области построения.
- ◆ Строим проекции горизонтали h . Первоначально из точки A_1 по размерам 55 и 30 строим горизонтальную проекцию h_1 . Ее конечную точку обозначим 1_1 . Из точки 1_1 проводим вертикальную линию связи. Из точки A_2 проводим горизонтальный отрезок h_2 до точки 1_2 , которую определяем на пересечении с вертикальной линией проекционной связи от точки 1_1 . Профильную проекцию горизонтали h_3 строим как горизонтальный отрезок из точки A_3 длиной 30. Этот размер берем с горизонтальной проекции.
- ◆ В той же последовательности строим проекции фронтали f_1, f_2, f_3 и профильной прямой p_1, p_2, p_3 .

- ◆ Наносим обозначения проекций точек и отрезков, а также обозначаем углы между прямыми и плоскостями проекций.

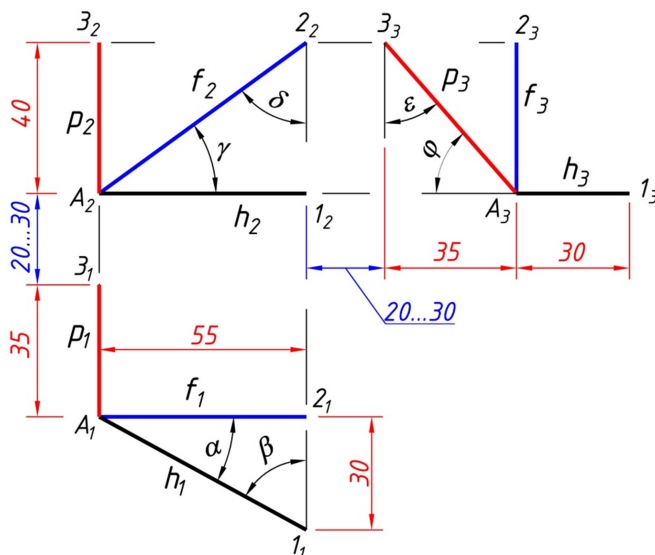


Рис. 4.2. Построение чертежа прямых уровня

4.4.3. Построение проецирующих прямых

Рассмотрим последовательность построения 3D-моделей (см. рис. 3.9а) и чертежей (см. рис. 3.9б) отрезков проецирующих прямых. Построение 3D-моделей выполняется в режиме ортогонального перемещения курсора при комбинированном методе задания координат. Размеры отрезков соответствуют разностям координат, приведенным в списках параметров (см. рис. 3.10).

- ◆ Создайте новый файл на основе шаблона.

Из точки $A(25, 20, 30)$ постройте отрезок горизонтально проецирующей прямой длиной 40 мм, направленный вверх.

- ◆ Перейдите в окно аксонометрии, проверьте, что установлена МСК и режим «ОРТО»;
- ◆ Отрезок \  \ Первая точка: 25,20,30 \ потяните курсор вверх в направлении оси Z и с клавиатуры введите 40 \ \ – построен отрезок e (см. рис. 3.9а).

Другой вариант построения – задание второй точки через относительные декартовы координаты:

- ◆ Отрезок \ 25,20,30 \ @0,0,40

или через относительные сферические координаты:

- ◆ Отрезок \ 25,20,30 \ @40<0<90.

Для построения фронтально проецирующей прямой q (см. рис. 3.9а) курсор в ортогональном режиме следует перемещать вдоль оси Y, задав длину отрезка. Можно задать вторую точку, введя @0,40,0 или @40<90, где 40 – длина отрезка.

Для построения отрезка профильно проецирующей прямой курсор ортогонально перемещайте вдоль оси X или для второй точки введите координаты @40,0,0 или @40<0.

Построение чертежа проецирующих прямых (см. рис. 3.9б) выполняется в следующей последовательности:

- ◆ наносим проекции базовой точки A . При этом соблюдаем проекционную связь и задаем расстояние между проекциями A_1, A_2, A_3 достаточное для размещения всех проекций отрезков (в рассматриваемом примере это расстояние должно быть больше 40);
- ◆ согласно 3D-модели строим проекции ортогональными отрезками длиной 40 мм;
- ◆ наносим обозначения проекций отрезков и их конечных точек. Проекции конкурирующих точек следует обозначать по образцу $A_1 = C_1 = e_1$. Эта запись означает, что горизонтальные проекции точек A, C и всей прямой e совпадают;
- ◆ сохраните модели в файле «Проецирующие прямые .dwg».

4.5. 3D-модель прямых различного взаимного положения

Рассмотрим два варианта построения 3D-модели отрезков, показанной на рис. 3.11, 3.13. Первый вариант – по координатам точек отрезков. Второй вариант – по бесосному чертежу отрезков.

4.5.1. Построение 3D-модели по координатам точек

Координаты точек для построения в МСК – см. рис. 3.11б.

Модель к рис. 3.11

Алгоритм построения должен обеспечить пересечение отрезков a и c в точке 2 и параллельность отрезков b и c . Для пересечения отрезков строим их с общей точкой 2, т. е. строим отрезки 1-2-3, затем удлинняем эти отрезки со стороны точки 2. Для параллельности отрезков применяем копирование:

- ◆ создайте новый файл на основе шаблона;
- ◆ заморозьте слой с плоскостью P_2 ;
- ◆ Построение \ Черчение \ Отрезок  \ введите координаты точки 21.2,5.7,71 \ введите координаты точки 2 \ введите координаты точки 3;
- ◆ Построение \ Редактирование \ Увеличение  \ Динамика \ укажите отрезок a вблизи точки 2 \ перемещая мышью, вытяните отрезок на необходимую величину \ вытяните отрезок b – построены пересекающиеся в точке 2 отрезки a и c ;
- ◆ Построение \ Редактирование \ Копирование  \ Выбор объектов: укажите отрезок c \ Базовая точка: с объектной привязкой «Конточка» укажите точку 3 \ Вторая точка: введите координаты точки 4;

- ◆ для наглядности модели постройте проекции отрезков на Π_1 (см. раздел 2.22, п. 5).

Для построения проецирующего отрезка k восстановите перпендикуляр из точки 5 пересечения проекций a_1 и b_1 :

- ◆ Отрезок \ с привязкой «Конточка» укажите точку 5 \ в режиме «ОРТО» перемещайте курсор вверх вдоль оси Z до пересечения с отрезком a \.

Для наглядности и контроля точности построений проставьте маркеры в точки 2, 5, 6, 7:

- ◆ Точка \ с привязкой «Пересечение» укажите точки 2, 5, 6, 7 – проставлены маркеры.

При правильно построенной модели при наведении курсора на точки 2, 5, 6, 7 должна сработать привязка «Пересечение», подтверждающая пересечение отрезков. Иначе имеются ошибки построения, которые необходимо устранить.

Модель (см. рис. 3.11) построена:

- ◆ сохраните файл с именем «Взаимное положение прямых .dwg».

Модель к рис. 3.13

Модель взаимного положения скрещивающихся прямых a, b (рис. 3.13) можно построить на основе предыдущей модели, показанной на рис. 3.11:

- ◆ создайте копию файла модели (см. рис. 3.11) и сохраните его с новым именем «Скрещивающиеся прямые .dwg»;
- ◆ восстановите плоскость Π_2 – разморозьте слой этой плоскости;
- ◆ перенесите отрезок c и отрезки его проекции на новый слой и заморозьте этот слой;
- ◆ установите ПСК в плоскость Π_2 и постройте проекции отрезков a, b на эту плоскость;
- ◆ из точки 8 постройте проецирующий отрезок m , поставьте маркеры в точки 8,9,10;
- ◆ сохраните файл с именем «Скрещивающиеся прямые .dwg».

Автоматизированный чертеж прямых к рис. 3.12

Рассмотрим построение чертежа 3D-модели, приведенной на рис. 3.11. Чертеж построим в автоматическом режиме по алгоритму, приведенному в разделе 5.2.3. Согласно алгоритму из отрезков создадим тонкие полоски поверхностей, к которым применим команду 2D-вид. Чертеж выведем на Лист:

- ◆ откройте файл, содержащий 3D-модель (рис. 3.11). Перейдите в экран аксонометрии, проверьте что установлена МСК;
- ◆ укажите отрезки a, b, c и примените команду «Изолировать» \ Изолировать объекты – остались только отрезки, для которых строим чертеж;
- ◆ 3D-инструменты \ Прямое моделирование \ Выдавливание  \ Выберите объект для выдавливания: укажите отрезки \ Укажите высоту выдавли-

вания: 0.001 – из каждого отрезка построены полосы поверхностей шириной 0.001;

- ◆ 3D-инструменты \ 2D-Виды \ 2D Вид  \ Выберите объекты: укажите полосы \ Укажите, куда будут вставляться виды: A3 – произошел выход на Лист \ переместите курсор на свободное место и укажите место вставки горизонтальной проекции \ переместите курсор вверх и укажите положение фронтальной проекции – построены горизонтальные и фронтальные проекции отрезков как основа чертежа;
- ◆ Построение \ Разбивка  \ укажите обе проекции – проекции отделены от 3D-модели;
- ◆ выполните оформление чертежа, придав линиям вес, построив отрезки проекционной связи и обозначения точек (см. рис. 3.12);
- ◆ сохраните файл с именем «Чертеж отрезков .dwg».

4.5.2. Построение 3D-модели, заданной на чертеже

Рассмотрим построение 3D-модели (см. рис. 3.11), если для нее задан безосный чертеж (рис. 4.3). Такой чертеж приводится как условие задач в рабочей тетради на практических занятиях. Алгоритм построения 3D-модели на основе ее безосного чертежа был рассмотрен в разделе 1.7.2.

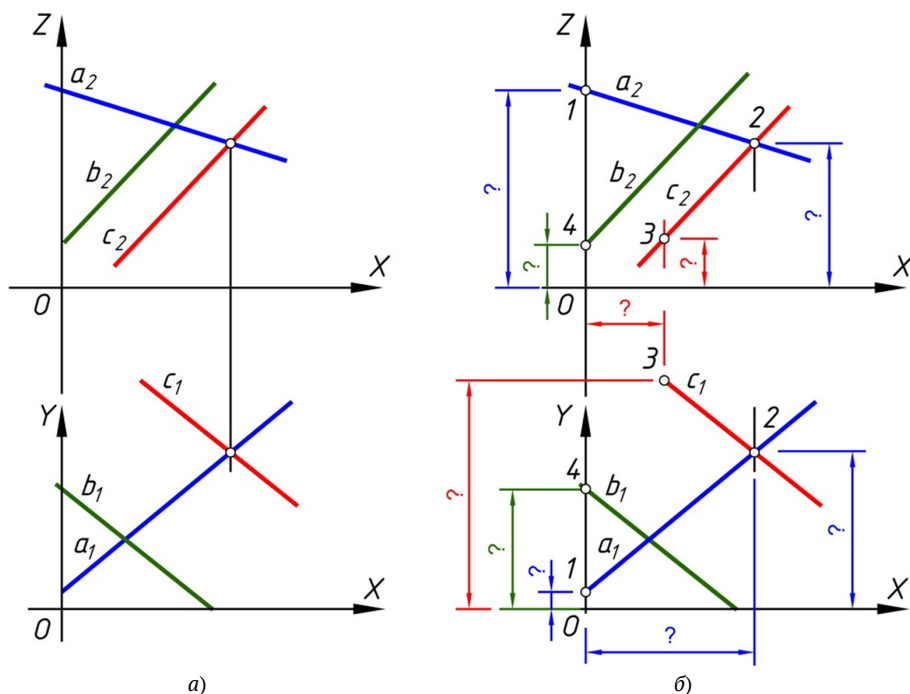


Рис. 4.3. Построение 3D-модели прямых, заданных на чертеже:
 а – введение системы координат; б – определение координат точек

В исходном виде чертеж (рис. 4.3) задан безосным. Для построения 3D-модели необходимо выполнить действия, рассмотренные в разделе 1.7.2: ввести оси вспомогательной системы координат, воспроизводящей оси МСК, задать опорные точки отрезков и по чертежу измерить координаты опорных точек.

Определим взаимное положение прямых, заданных на чертеже (рис. 4.3). Исходя из свойств прямых (см. раздел 3.4.2), следует, что прямые a и c взаимно пересекаются, поскольку точки пересечения их одноименных горизонтальных и фронтальных проекций расположены на одной вертикальной линии связи. Прямые b и c являются параллельными, поскольку их одноименные проекции взаимно параллельны.

1. На поле чертежа (в рабочей тетради) чертим оси вспомогательной системы координат. От положения введенных осей взаимное положение отрезков не зависит. Поэтому (рис. 4.3а) две горизонтальные оси OX проводим произвольно. Вертикальные оси OY и OZ также можно нанести произвольно, но обязательно расположить их на одной вертикальной прямой.
2. Нанесем на чертеже проекции четырех точек, которые определят положение отрезков (рис. 4.3б). Точки 1, 2, 3 определяют положение отрезков a , c . Для задания отрезка b достаточно задать точку 4 и учесть его параллельность отрезку c . Для упрощения построений точки 1, 4 совместим с осями OY и OZ . Фронтальные и горизонтальные проекции точек 1...4 необходимо нанести на вертикальных линиях связи.
3. Для каждой введенной точки измеряем по чертежу значения координат X , Y , Z . На рис. 4.3б эти значения обозначены знаком «?», поскольку они зависят от задания осей и в каждом решении (у каждого студента) будут различны. Координаты записываем на поле чертежа. Например, для точки 1 (на рис. 4.3б это размеры синего цвета) запись может иметь вид: «точка 1: 0, 5.5, 33».
4. По измеренным координатам точек 1...4 строим 3D-модель, как изложено выше в разделе 4.5.1.

4.6. Алгоритмы оценки взаимного положения прямых по 3D-модели

Рассмотрим алгоритмы на примере 3D-модели, приведенной на рис. 3.11.

Для вывода о пересечении отрезков прямых линий a и c :

- ◆ увеличьте на экране место предполагаемого пересечения отрезков;
- ◆ Построение \ Черчение \ Точка  \ Shift + ПКМ \ в контекстном меню укажите привязку «Пересечение» \ наведите и задержите курсор на предполагаемое место пересечения отрезков \ если рядом с курсором возникло сообщение о срабатывании привязки, то пересечение действительно есть и место пересечения найдено \ можно завершить команду Enter и поставить маркер точки, подтверждающий пересечение, или прервать команду Esc.

Если отрезки проверяемых прямых короткие и предполагаемая точка пересечения не видна, то следует предварительно увеличить длину отрезков коман-

дой «Увеличение  \ Динамика» до видимого пересечения. Можно увеличить длину отрезков перемещением концевых ручек отрезков.

Вывод о параллельности прямых рассмотрим на примере отрезков b и c , которые были построены копированием, т. е. являются параллельными по построению:

- ◆ командой «Единицы» установите предельную точности измерения угловых параметров 10^{-8} ;
- ◆ проверьте, что установлена МСК;
- ◆ укажите оба отрезка и введите с командной строки «Список» \ $F2$ – открылось окно текстового режима, в котором выведена информация по указанным отрезкам;
- ◆ найдите в информации каждого отрезка два угловых параметра. Значение должны быть попарно равны для каждого отрезка. Например, если для отрезка b получены значения «угол в плоскости XU : 322.81529355» и «угол от плоскости XU : 39.49409768», то те же значения должны быть для отрезка c ;
- ◆ установите другую систему ПСК и убедитесь, что равенство соответствующих углов сохранилось. Например, если ПСК установлена в плоскость Π_2 , то для каждого отрезка получены другие, но взаимно равные значения: «угол в плоскости XU : 45.97102193» и «угол от плоскости XU : 27.80080491».

Делаем вывод, что для подтверждения параллельности отрезков необходимо в произвольной системе координат убедиться в попарном равенстве двух углов, выводимых командой «Список».

4.7. Применение кажущегося пересечения для скрещивающихся прямых

О кажущемся пересечении см. раздел 3.4.1. Рассмотрим пример задачи на применение объектной привязки «Кажущееся пересечение».

Даны две скрещивающиеся прямые a, b (рис. 4.4а). Требуется построить отрезок прямой k , перпендикулярной плоскости Π_1 и пересекающей прямые a, b .

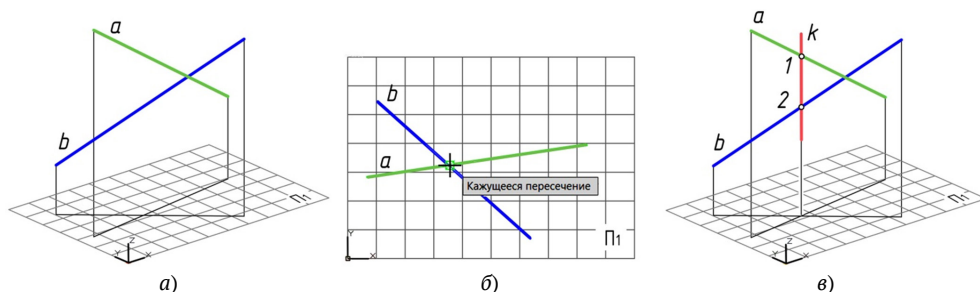


Рис. 4.4. Кажущееся пересечение скрещивающихся прямых относительно Π_1 :
 a – 3D-модель прямых; b – объектная привязка;
 v – отрезок горизонтально проецирующей прямой, пересекающей заданные

Рассмотрим решение для плоскости Π_1 :

- ◆ по условиям задачи постройте 3D-модели отрезков a, b ;
- ◆ установите ортогональный вид сверху (рис. 4.4б);
- ◆ команда «Точка» \ *Shift* + ПКМ \ в контекстном меню объектных привязок укажите «Кажущееся пересечение» \ наведите курсор на место кажущегося пересечения и дождитесь срабатывания привязки (рис. 4.4б) \ выполните клик ЛКМ – поставлен маркер точки 1 (рис. 2.6в);
- ◆ вращая изображение, убедитесь в появлении маркера точки 1.

Точка кажущегося пересечения проставляется на прямой, которая ближе к наблюдателю. В нашем примере точка 1 проставлена на прямой a .

Для построения отрезка k :

- ◆ включите режим «ОРТО»;
- ◆ Отрезок \ с объектной привязкой «Узел» укажите маркер точки 1 \ перемещайте курсор ортогонально вдоль оси Z до пересечения с отрезком b ;
- ◆ применив объектную привязку «Пересечение», поставьте маркер точки 2, подтвердив, что прямая k пересекает прямую b .

Найденная прямая k является горизонтально проецирующей. Положение точек 1, 2 позволяет дополнить вывод о взаимном положении скрещивающихся прямых a, b относительно плоскости Π_1 , а именно что прямая a расположена над прямой b .

Тем же алгоритмом можно построить фронтально проецирующую прямую или профилно проецирующую прямые, пересекающие заданные a и b , и уточнить взаимное положение прямых относительно Π_2 или Π_3 .

Рассмотренная задача имеет более общую формулировку: *найти прямую, пересекающую две заданные скрещивающиеся прямые и перпендикулярную произвольной заданной плоскости*. Здесь следует установить ПСК в заданную плоскость. Затем применить команду «План» или вид сверху ПСК, чтобы отобразить вид на плоскость ХОУ ПСК. Далее применить изложенный выше алгоритм с привязкой «Кажущееся пересечение».

4.8. Построение 3D-моделей плоскостей

Рассмотрим рекомендации к построению 3D-моделей к разделу 3.5 по теме «Принадлежность точки и прямой линии плоскости».

4.8.1. Модель к рис. 3.14 «3D-модели и чертежи плоскости»

За основу 3D-моделей плоскостей к рис. 3.14 рекомендуем взять модель к рис. 3.11, сохраненную в файле «Взаимное положение прямых.dwg» (см. выше, раздел 4.5.1):

- ◆ создайте копию файла модели и откройте его;

- ◆ на Листе скопируйте экран аксонометрии и расположите его рядом справа. Для плоскости, заданной пересекающимися прямыми (рис. 3.14а), следует перенести на отдельный слой и избирательно в окне заморозить отрезок b и его проекцию;
- ◆ для плоскости, заданной параллельными прямыми (рис. 3.14б), следует перейти в следующее окно аксонометрии, открыть файл с отрезком b и на новом слое скрыть изображение отрезка c ;
- ◆ сохраните файл с именем «Плоскости 3D .dwg».

4.8.2. Модели к рис. 3.16 «Пространственное положение плоскостей»

- ◆ В шаблоне создайте две копии видового экрана аксонометрии. Убедитесь, что в каждом экрана установлена МСК и визуальный стиль «Концептуальный»;
- ◆ создайте три новых слоя: для плоскости общего положения с именами: «Плоскость ОП», «Плоскость уровня» и «Плоскость проецирующая».

Треугольник плоскости общего положения α (см. рис. 3.16а):

- ◆ перейдите в первый экран, установите слой «Плоскость ОП»;
- ◆ Построения \ 3D-полилиния  \ введите координаты вершин (9.7,42.4,24) (44.4,11.3,17.21) (62.3,41.6,60.1) \ Замкнуть. Создайте из треугольника область и командой «Конвертирование в 2D» постройте проекции треугольника на координатные плоскости.

Треугольник горизонтальной плоскости уровня β (см. рис. 3.16б):

- ◆ перейдите во второй видовой экран аксонометрии, установите слой «Плоскость уровня»;
- ◆ Вид \ Координаты \ Начало  \ 0,0,45 – ПСК подняли на высоту 45;
- ◆ Построения \ Полилиния  \ введите координаты вершин (23.1,46.1) (56,6,6) (85.7,57.7) \ Замкнуть. Создайте из треугольника область и постройте проекции.

Треугольник горизонтально проецирующей плоскости γ (рис. 3.16в):

- ◆ перейдите в третий видовой экран; установите слой «Плоскость проецирующая»;
- ◆ верните МСК;
- ◆ ПСК \ Начало  \ 16.9,56.5,0;
- ◆ ПСК \ Вокруг оси Z  \ Угол поворота: 40;
- ◆ ПСК \ Вокруг оси X  \ Угол поворота: 90 – ПСК установлена в плоскость γ ;
- ◆ Построения \ Полилиния  \ введите координаты (0,43.2) (43.9,7.5) (65.6,67.1) \ Замкнуть. Создайте из него область и постройте проекции;
- ◆ сохраните файл с именем «Пространственное положение плоскостей .dwg».

4.8.3. Модель к рис. 3.17 «Пример параллельных плоскостей»

- ◆ В шаблоне в окне аксонометрии в МСК постройте треугольник по координатам вершин (13,47,41), (50,10,18), (76,31,64). Создайте из контура треугольника область.
- ◆ Установите ПСК по трем точкам в плоскость треугольника.
- ◆ В режиме «ОРТО» скопируйте область треугольника на расстояние 30 и –30 вдоль оси Z .
- ◆ Придайте модели наглядность построением проекции на Π_1 и цветовым решением.
- ◆ Сохраните файл с именем «Треугольники 3D .dwg».

ГЛАВА 5

Проецирование. Пересечение. Перпендикулярность (лекция 3)

В лекции рассмотрены три раздела теоретического курса геометрического моделирования: проецирование, пересечение, перпендикулярность. Вы узнаете, как отобразить (спроецировать) точку или прямую на плоскость; как построить точки и линии пересечения прямых линий и плоскостей; как построить перпендикуляр к прямой линии и к плоскости, взаимно перпендикулярные плоскости. Рассмотрим автоматическое построение чертежей этих объектов. Согласно направленности курса основное внимание уделим реализации этих задач методами 3D-моделирования. Для сравнения кратко приведем реализацию этих разделов методами начертательной геометрии.

5.1. Ортогональное и косоугольное проецирование точки и прямой на плоскость

Ортогональное (прямоугольное) проецирование – это вариант параллельного проецирования, при котором проецирующие лучи направлены перпендикулярно плоскости картины (см. раздел 1.4.3). Основное практическое применение ортогонального проецирования – построение чертежа по методу Гаспара Монжа (см. раздел 1.4.5). В 3D-моделировании это основной вариант автоматического построения чертежей на основе 3D-моделей.

Косоугольное проецирование – это параллельное проецирование под углом, отличающимся от прямого. Практическое применение косоугольного проецирования – построение теней от солнечных лучей на архитектурно-строительных чертежах. В нашем курсе косоугольное проецирование применяется для нахождения точек и линий пересечения прямых и плоскостей.

На рис. 5.1*a* показана 3D-модель отрезка DE и его различные проекции на плоскость треугольника ABC . Модель иллюстрирует следующие свойства проекций.

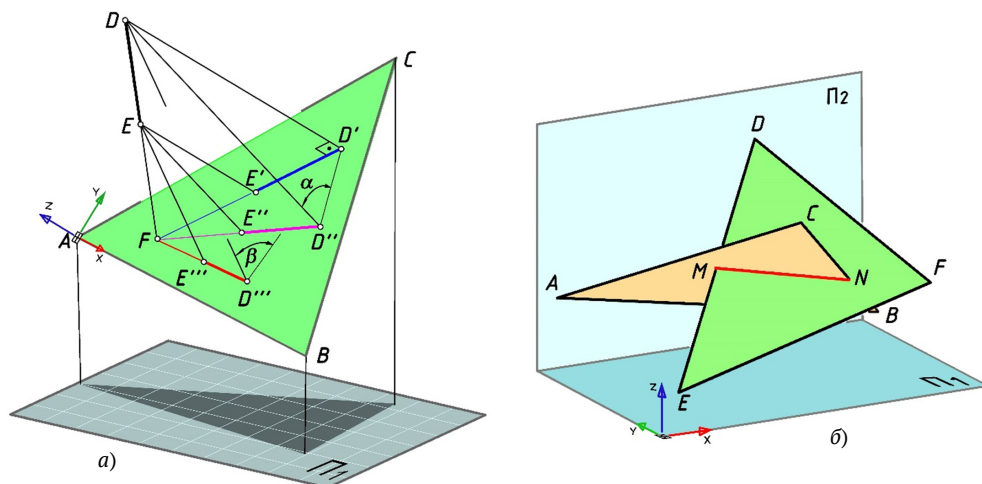


Рис. 5.1. Ортогональное и косоугольное проектирование:

а – проектирование точек и отрезка прямой; *б* – проектирование плоскости на плоскость

Существует единственная ортогональная проекция объекта (точки, прямой и др.) на заданную плоскость. Например, для точек D, E (рис. 5.1а) ортогональные проекции на плоскость (ABC) – это точки D', E' , которые определяют единственную ортогональную проекцию отрезка DE на ту же плоскость – отрезок $D'E'$.

Существует множество косоугольных проекций объекта на плоскость. Положение косоугольных проекций определяется направлением проектирования. Например, если углы проектирования $\alpha, \beta \neq 90^\circ$, то проекции отрезка DE – это отрезки $D''E'', D'''E'''$.

Все проекции отрезка, прямо- или косоугольные, на плоскость пересекаются в единой точке, в которой отрезок пересекается с плоскостью. На рис. 5.1а это точка F , являющаяся точкой пересечения всех проекций отрезка DE на плоскость треугольника и одновременно точкой пересечения отрезка DE с этой плоскостью.

Проекция плоскости, построенная в направлении произвольного отрезка, принадлежащего этой плоскости, на вторую плоскость, является линией пересечения этих плоскостей. Такая проекция является косоугольной проекцией отрезков прямых первой плоскости на вторую. Например (рис. 5.1б), чтобы построить линию MN пересечения треугольников ABC и DEF , достаточно построить проекцию ребра DF в направлении ребра DE . Можно построить проекцию ребра AB по направлению BC и т. д. Возможно множество сочетаний проектируемых отрезков и направлений проектирования, приводящих к единственно возможному отрезку MN .

Построение 3D-модели, приведенной на рис. 5.1, – см. раздел 6.1.1.

- Лектору: откройте файл «Орто и Косоугольное проектирование отрезка .dwg» (см. раздел 6.1.1). Покажите различные проекции отрезка, их общую точку как точку пересечения отрезка с плоскостью.

5.2. Ортогональное проецирование в nanoCAD

Рассмотрим методы автоматического ортогонального проецирования, которые позволяют решать задачи на построение точек и линий пересечения прямых и плоскостей, а также построение чертежей. Ортогональное проецирование методами начертательной геометрии рассмотрим в теме «Перпендикулярность» (см. раздел 6.8.5).

5.2.1. Применение функциональной панели «Свойства»

Алгоритм позволяет построить проекцию отрезка прямой линии или маркера точки на плоскость, заданную ПСК. Алгоритм основан на том, что проекция отличается от объекта только значением Z -координат, которые для проекции равны нулю. Панель «Свойства» не только отображает значения параметров, но и позволяет их редактировать. Для построения проекции следует создать копию отрезка или точки, установить ПСК в плоскость и для копии в панели свойств задать Z -координаты равными нулю.

На рис. 5.2а, б показана 3D-модель, в которой построены ортогональные проекции отрезка EF и точки D на плоскость $\Delta(ABC)$. Для этого установлена ПСК так, что плоскость XOY совпадает с плоскостью Δ . В панели свойств отрезка отображены его координаты в ПСК (рис. 5.2б). Для отрезка создана его копия, совпадающая с отрезком. Создание копии необходимо для сохранения исходного объекта. В панели свойств для копии (рис. 5.2в) Z -координатам присвоены значения 0. В результате присвоения происходит перестроение копии, и она становится проекцией отрезка – отрезком $E'F'$.

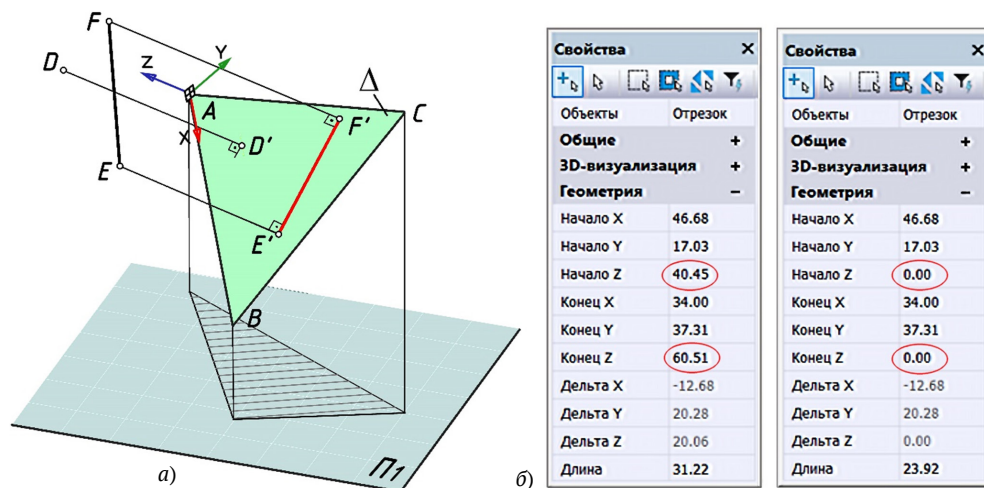


Рис. 5.2. Ортогональное проецирование:
а – 3D-модель; б – панель свойств отрезка EF ;
в – панель свойств проекции отрезка – $E'F'$

Убедиться, что построенный отрезок $E'F'$ является проекцией отрезка EF , можно, применив к ним команду «Список». Команда выводит в текстовый экран

координаты концов отрезков и показывает, что XY -координаты точек отрезка и его копии равны между собой, а Z -координаты для отрезка $E'F'$ равны нулю. Тем же алгоритмом построена проекция точки D – точка D' . Особенность проецирования точки в том, что она должна быть предварительно визуализирована маркером.

Алгоритм построения 3D-модели (рис. 5.2) приведен в разделе 6.1.2.

5.2.2. Конвертирование в 2D

Второй вариант построения ортогональных проекций – это применение команды «Конвертирование в 2D». Команда позволяет строить проекции более широкого набора объектов, чем панель «Свойства». Кроме точек и отрезков прямых, возможно ее применение для окружностей, дуг, эллипсов, областей, полилиний, спиралей.

Алгоритм команды: создать копию объекта, установить ПСК в плоскость проецирования, выполнить команду с командной строки и указать копию объекта. Команда «обнуляет» Z -координаты точек указанного объекта, заменяя их на нулевые значения в ПСК. Это преобразует 3D-копию в проекцию на плоскость XY системы ПСК.

На рис. 5.2а показана проекция треугольника ABC на плоскость Π_1 , построенная командой «Конвертирование в 2D».

О построении проекции треугольника (рис. 5.2) см. раздел 6.1.2.

- Лектору: в файле «Орто проецирование отрезка на треугольник .dwg» (см. раздел 6.1.2) покажите построение проекций через панель «Свойства» и командой «Конвертирование в 2D».

5.2.3. Координатные фильтры

Координатный фильтр (КФ) – техническое средство nanoCAD'a, позволяющее взять у точки, указанной курсором, часть ее координат.

Применением фильтров можно построить точку, координаты которой взяты у различных точек. Например, построены точки A, B, C как маркеры или они являются точками ранее построенных объектов. Можно построить точку D , у которой X -координата взята у точки A , Y -координата – у точки B , Z -координата – у точки C .

Предусмотрено шесть координатных фильтров: три единичных фильтра X, Y, Z и три парных XY, XZ, YZ . Вызвать фильтр (и посмотреть меню фильтров) можно только при задании точки во время выполнения какой-либо команды, подобно вызову объектной привязки в разовом режиме, например при построении точки. Основное применение в нашем курсе имеет фильтр XY , позволяющий построить ортогональную проекцию точки на плоскость ПСК.

Примеры применения фильтров для построения проекций – см. раздел 6.1.3.

- Лектору: покажите построение проекции точки и отрезка на плоскость применением фильтра XY .

5.2.4. Автоматизированный чертеж 3D-модели, состоящей из точек, отрезков, и пространственных линий

В разделе 1.8.2 (рис. 1.12) показано применение команд группы «2D-виды» для автоматизированного построения ортогонального чертежа модели, состоящей из 3D-солов. Эта команда применима также к объектам типа «Поверхность» и «Область». Однако к точкам и линейным объектам – отрезкам, окружностям, сплайнам и др. – применение 2D-видов не предусмотрено.

Рассмотрим метод, позволяющий применить команды группы «2D-виды» и для линейных объектов. Метод заключается в применении к линейным объектам команды «Выдавливание» на минимальную величину выдавливания. В итоге из объектов образуются полосы поверхностей, для которых могут быть применены команды группы «2D-виды».

Для задач на пересечение тонкие полосы поверхности следует дополнительно преобразовать в соловы, применив к ним команду «Толщина» с минимальным значением толщины. К соловым можно применить команду «Объединение», которая определит точки пересечений.

Для сложных пространственных кривых, построенных командой «Сплайн», применение команды «Выдавливание» не предусмотрено. Для них можно применить команду «Выдавливание по траектории». Объектом выдавливания может быть окружность минимального радиуса. В результате из пространственной линии образуется трубчатый солов минимального поперечного сечения.

Маркеры точек также выдавливанию не подлежат, поэтому вместо них можно поставить сферы минимального радиуса, которые на чертеже отобразятся в окружности.

Из созданных объектов можно строить проекции и чертеж командами группы «2D-виды». Величина выдавливания и толщина задаются минимальными, например 0.001. Поэтому образованные 3D-соловы заменяют отрезки или линии практически с сохранением точности чертежа. Рассмотренный алгоритм позволяет в автоматическом режиме строить чертежи сложных моделей.

На рис. 5.3 показано применение команд группы «2D-виды» для построения чертежа 3D-модели, рассмотренной выше (см. рис. 5.2а), состоящей из отрезков, треугольника как области и маркера точки. На рис. 5.4 показано построение чертежа для 3D-модели пересечения отрезка прямой с плоскостью.

Подробно алгоритм построения показанных автоматизированных чертежей см. в разделе 6.2.

- Лектору: в файле «Автоматический чертеж Орто проецирования .dwg» (см. раздел 6.2.2) покажите построение проекций в автоматическом режиме.

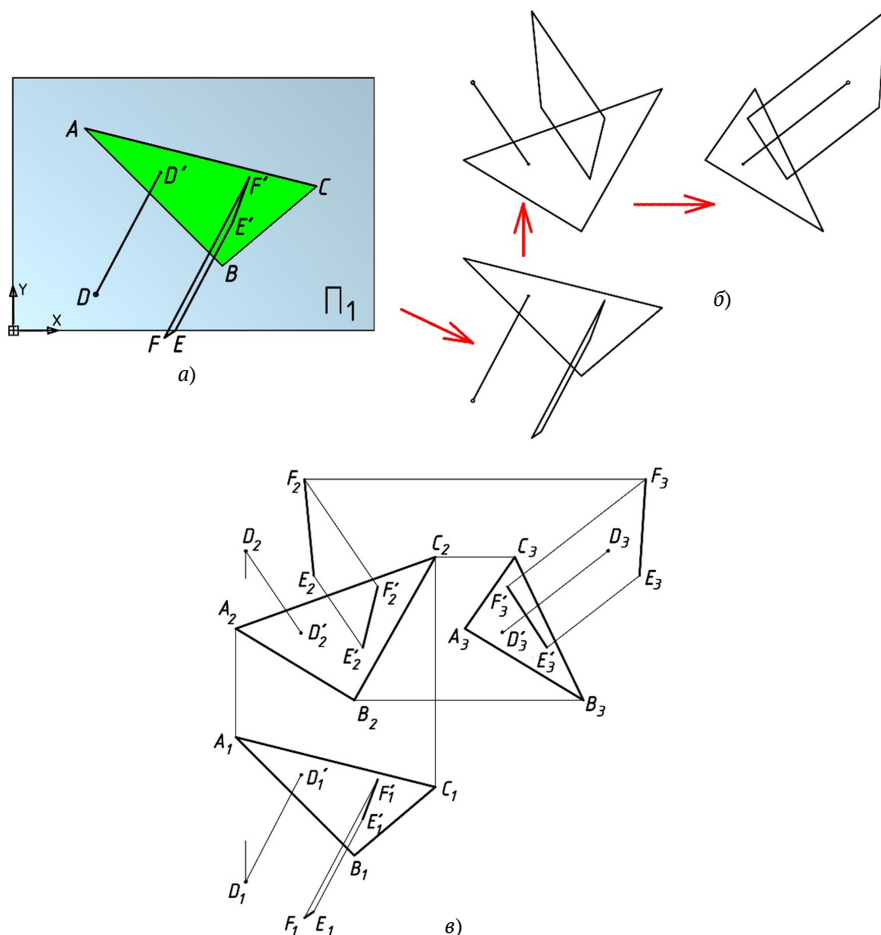


Рис. 5.3. Автоматическое построение чертежа 3D-модели из отрезков и плоскостей:
 а – 3D-модель; б – проекции как 2D-виды; в – оформленный чертеж

5.3. Пересечение прямой линии с плоскостью. Алгоритм 3D

Основой для решения этой задачи в геометрии является положение: *линия пересекается с поверхностью в точках, в которых она пересекается со своей проекцией на эту поверхность.*

В этом разделе рассмотрим простейший вариант задачи – пересечение прямой линии с плоскостью. Из школьного курса геометрии, а также из очевидных представлений следует, что пересечение происходит в одной точке. Общая формулировка условия пересечения преобразуется в более простую: *прямая пересекается с плоскостью в точке, в которой она пересекается со своей проекцией на эту плоскость.*

Из множества возможных проекций прямой на плоскость (см. раздел 5.1), учитывая рассмотренные выше алгоритмы 3D-ортогонального проецирования (см. раздел 5.2), выберем ортогональное проецирование. Таким образом, для решения задачи о построении точки пересечения прямой с плоскостью методами 3D в Платформе nanoCAD следует *построить ортогональную проекцию отрезка на плоскость и найти пересечение отрезка с этой проекцией*.

При явном пересечении отрезка с плоскостью часть линий становится невидимой, закрытой плоскостью. Невидимую часть отрезка прямой линии, расположенную за плоскостью, показывают штриховой линией. Для этого 3D-модель следует отобразить в одном из наглядных видовых стилей, выполнив в нем настройку отображения «перекрытых линий» штриховой линией.

На рис. 5.4а показана 3D-модель построения точки пересечения отрезка m с плоскостью $\Delta(ABC)$. Для этого в плоскость установлена ПСК, применением панели «Свойства» или команды «Конвертирование в 2D» построена проекция отрезка – отрезок m' . Командой «Точка» с объектной привязкой «Пересечение» поставлен маркер искомой точки M . Невидимая часть отрезка m , расположенная за треугольником, показана штриховой линией.

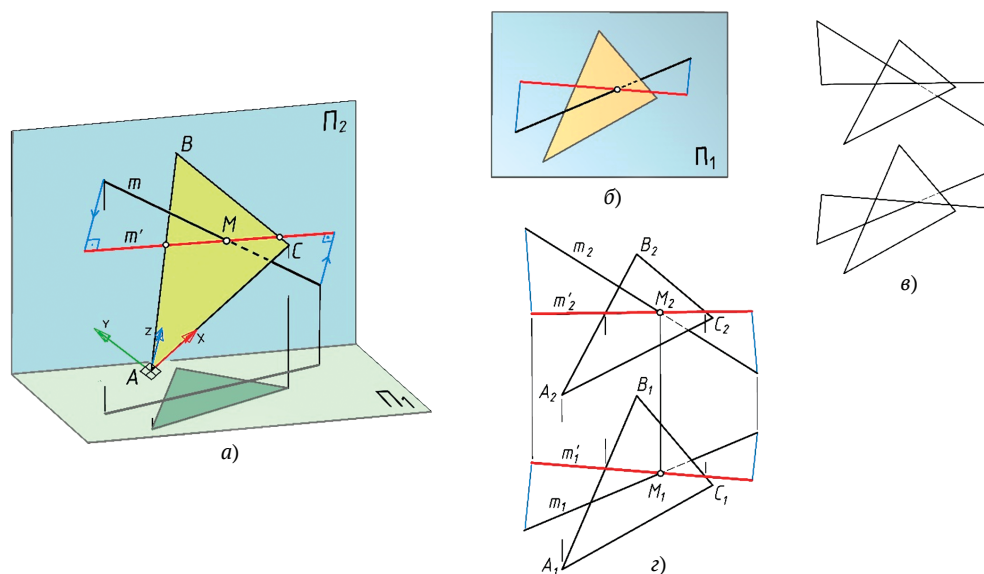


Рис. 5.4. 3D-модель пересечения отрезка с плоскостью и автоматизированный чертеж:
 а – модель; б – вид сверху; в – 2D-виды; з – чертеж

Для проверки правильности решения следует убедиться, что найденная точка принадлежит как отрезку, так и плоскости. Для проверки принадлежности к отрезку можно на 3D-модели установить ПСК осью Z вдоль отрезка прямой и убедиться, что в этой ПСК X,Y-координаты проверяемой точки равны нулю. Для проверки принадлежности к плоскости установить ПСК в эту плоскость и убедиться, что Z-координата точки равна нулю.

Точку пересечения на чертеже можно с допустимой точностью 0.001 определить, построив чертеж в автоматическом режиме по алгоритму, приведенному в разделах 5.2.4 и 6.2.2. Пример чертежа приведен на рис. 5.4в, г.

Если отрезок полностью расположен с одной стороны от плоскости и не пересекается со своей проекцией, то для нахождения точки пересечения отрезок и проекцию следует удлинить до взаимного пересечения. Примером является точка F (см. выше рис. 5.1а), которая построена при удлинении и пересечении отрезка DE с любой из его проекций, в частности с ортогональной проекцией $D'E'$.

Построение модели и чертежа приведено в разделе 6.2.3.

- Лектору: откройте подготовленный файл «Пересечение отрезка с плоскостью .dwg». Найдите точку пересечения отрезка с плоскостью, применяя различные методы проецирования;
 - докажите, что найденная точка является точкой пересечения прямой и плоскости;
 - покажите построение проекций модели как 2D-видов.

5.4. Косоугольное проецирование. Алгоритмы 3D

Косоугольное проецирование позволяет решать множество прикладных и «теоретических» задач (см. выше, раздел 5.1). В Платформе nanoCAD не предусмотрены специальные команды косоугольного проецирования, аналогичные инструментам ортогонального проецирования. Рассмотрим три примера, в которых показано, как выполнять косоугольное проецирование с помощью специальных 3D-алгоритмов.

5.4.1. Построение недостающей проекции точки

Задача. В плоскости Δ (ABC) (рис. 5.5а) построить точку M , для которой задана фронтальная проекция – точка M_2 .

В разделе 3.5.3 приведено решение методами начертательной геометрии. Здесь рассмотрим 3D-алгоритм решения.

Решение сводится к проецированию точки M_2 на плоскость Δ . Направление проецирования определяется прямой n , перпендикулярной плоскости Π_2 и проходящей через точку M_2 . Поскольку плоскость Δ занимает общее положение, то прямая n не перпендикулярна этой плоскости, и по отношению к ней проецирование является косоугольным.

Решение показано на рис. 5.5а. Построена прямая n и, согласно алгоритму, приведенному выше (см. раздел 5.3), решена задача о ее пересечении с плоскостью Δ . Построена ортогональная проекция прямой n – прямая n' на плоскость Δ . Искомая точка M является результатом пересечения прямой n со своей ортогональной проекцией n' на плоскость Δ .

Алгоритм построения приведен в разделе 6.3.1.

- Лектору: откройте файл «Косоугольное проецирование точки .dwg». Постройте проекцию точки M_2 на плоскость треугольника Δ .

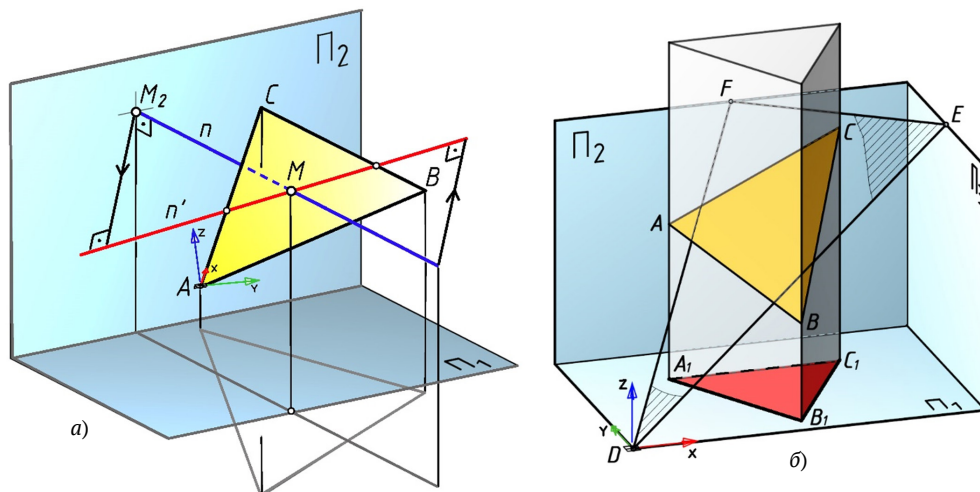


Рис. 5.5. 3D-модели косоугольного проецирования:

- а – построение точки в плоскости по фронтальной проекции этой точки;
 б – построение треугольника в заданной плоскости по его горизонтальной проекции

5.4.2. Проецирование плоской фигуры на плоскость

Задача. В плоскости общего положения $\Sigma(DEF)$ (рис. 5.5б) построить треугольник $\Delta(ABC)$, если задана его горизонтальная проекция – треугольник $\Delta'(A_1B_1C_1)$.

Решение заключается в построении проекции $\Delta'(A_1B_1C_1)$ на плоскость Σ . Направление проецирования – перпендикулярно Π_1 . Поскольку направление проецирования не перпендикулярно плоскости Σ , то по отношению к этой плоскости проецирование косоугольное. Построен вспомогательный объект – призма, имеющая основанием Δ' . Боковые грани призмы перпендикулярны Π_1 . Искомый $\Delta(ABC)$ получен сечением призмы плоскостью Σ .

Алгоритм построения модели приведен в разделе 6.3.2.

Дополнительный пример косоугольного проецирования отрезка на плоскость при построении плоского пятиугольника приведен в разделе 6.7.

- Лектору: откройте файл «Косоугольное проецирование треугольника.dwg» (см. раздел 6.3.2). Постройте треугольник в плоскости Π_1 , постройте призму выдавливанием треугольника и постройте сечение призмы.

5.4.3. Построение падающей тени от призмы

Это прикладная задача, воспроизводящая падающую тень от здания на землю и на стену расположенного рядом здания. Тень является результатом проецирования объекта на плоскость под углом, отличающимся от прямого, т. е. ее построение – это задача косоугольного проецирования. Такая тень строится на архитектурно-строительных чертежах, на плане и фасаде зданий с целью придания чертежу наглядности. Построим геометрическую модель падающей тени, в которой земля – это плоскость Π_1 , а стена – плоскость Π_2 .

Падающая тень образуется потому, что здание перекрывает часть светового потока от солнца. В 3D-модели построим эту область как объемный объект (3D-солид). Затем выполним сечение этого объема плоскостями «земли и стены», т. е. плоскостями Π_1 и Π_2 . Контуры этих сечений и будут отображать форму падающих теней.

При построении теней архитектурно-строительных на чертежах принимается, что лучи света направлены по диагонали условного куба, грани которого параллельны координатным плоскостям Π_1 , Π_2 . При таком направлении углы проекций луча с осями координат МСК составляют 45° . При ручной технике (карандаш-бумага) это существенно упрощает построения. Мы принимаем это условие и строим тени при принятом направлении света.

На рис. 5.6 показано построение тени призмы (модель здания), расположенной на расстоянии от плоскости Π_2 , не превышающем высоту этой призмы. В этом случае тень от призмы состоит из двух областей, которые являются результатом косоугольного проецирования призмы на плоскость Π_1 и на плоскость Π_2 .

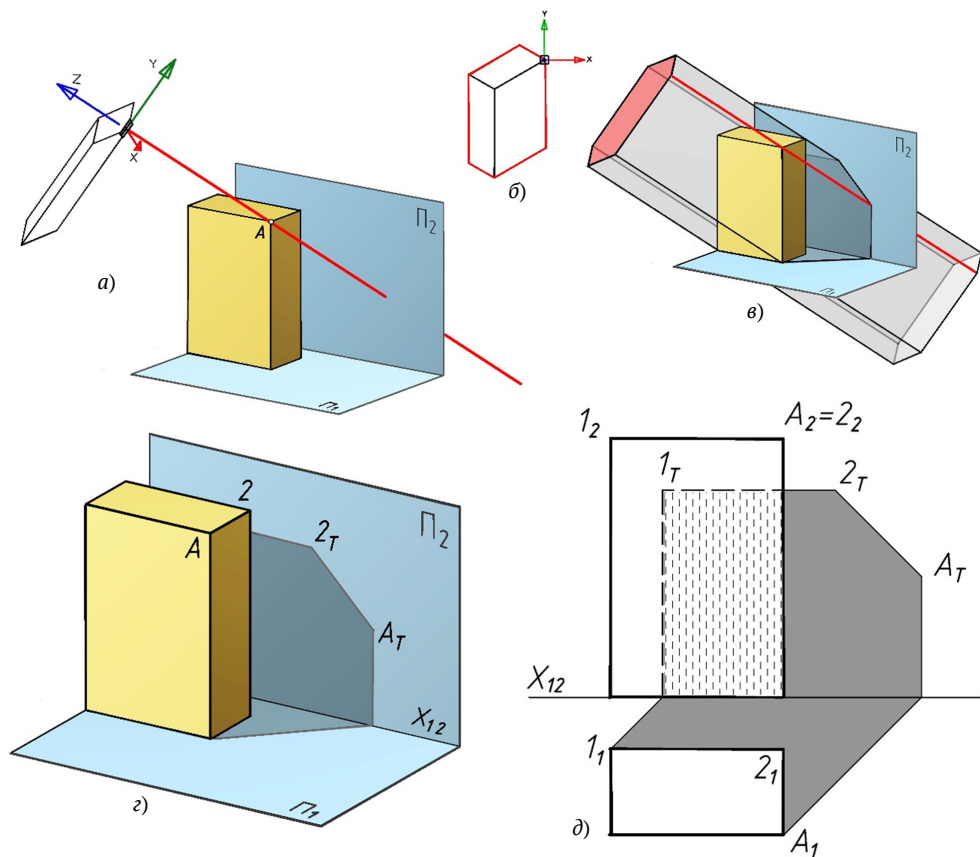


Рис. 5.6. Алгоритм построения падающей тени (косоугольное проецирование призмы):

а – призма, луч проецирования и 2D-Вид; *б* – контур выдавливания;
в – световой поток, закрываемый призмой; *г* – падающая тень; *д* – чертеж

Построен отрезок светового луча (рис. 5.6а), задающего направление проецирования призмы. Построен 2D-вид призмы на плоскость XU системы ПСК, у которой Z -ось совпадает с отрезком светового луча, т. е. проекция призмы на эту плоскость. Выдавливанием контура проекции (рис. 5.6б) по направлению луча создан объем светового потока, дающего тень (рис. 5.6в). На пересечении потока с плоскостями Π_1 и Π_2 получены искомые области теней (рис. 5.6г). Применением команды «2D Вид» получен чертеж призмы с тенями (рис. 5.6д). Часть тени на фронтальной плоскости закрыта телом призмы, контур такой тени автоматически отображается штриховой линией. Для штриховки области скрытой тени задан тип штриховки из прерывистых линий.

Подробно алгоритм построения приведен в разделе 6.3.3.

- Лектору: в файле «Тень призмы .dwg» (см. раздел 6.3.3) покажите модель построения тени как пример косоугольного проецирования.

5.5. Построение точки пересечения прямой с плоскостью. Алгоритм НГ

В разделе 5.3 был рассмотрен 3D-алгоритм задачи. Рассмотрим решение этой задачи в курсе начертательной геометрии (НГ), ее простейший вариант – пересечение прямой с плоскостью. Задача о нахождении точки пересечения пространственной линии с произвольной поверхностью в курсе НГ называется *первой позиционной задачей*.

Точку пересечения прямой с плоскостью (так же как в 3D алгоритме) в НГ находят как результат пересечения прямой со своей проекцией на эту плоскость. Но, в отличие от 3D-алгоритма, проекцию строят не перпендикулярно заданной плоскости, с которой прямая пересекается, а перпендикулярно одной из координатных плоскостей $\Pi_1 \dots \Pi_3$. Поэтому по отношению к заданной плоскости проецирование является косоугольным. Такую проекцию получают как результат пересечения заданной плоскости с вспомогательной проецирующей плоскостью, содержащей в себе заданную прямую.

Первоначально рассмотрим 3D-модель алгоритма НГ на примере задачи нахождения точки M пересечения прямой m с плоскостью, заданной треугольником $\Delta(ABC)$. Построение 3D-модели приведено на рис. 5.7а.

1. Построим вспомогательную секущую плоскость α , содержащую в себе отрезок m . Плоскость должна быть проецирующей. Рассмотрим вариант решения, в котором плоскость α является горизонтально проецирующей, т. е. $\alpha \perp \Pi_1$.
2. Построим проекции линии n пересечения плоскости α и заданной плоскости, в нашем примере – с $\Delta(ABC)$. Поскольку плоскость $\alpha \perp \Pi_1$, то в плоскости Π_1 совпадают проекции отрезка m , плоскости α и проекции n , т. е. $m_1 = n_1 = \alpha_1$. На пересечении горизонтальной проекции n_1 с проекциями плоскости α_1 , в нашем примере с ребрами $\Delta_1(A_1B_1C_1)$, найдем точки $1_1, 2_1$.
3. По проекционной связи на плоскости Π_2 , в нашем примере на ребрах $\Delta_2(A_2B_2C_2)$, найдем фронтальные проекции точек $1_2, 2_2$ и по ним построим фронтальную проекцию n_2 .

4. Находим пересечение фронтальных проекций n_2 и m_2 – точку M_2 .
5. По проекционной связи находим точку M_1 .

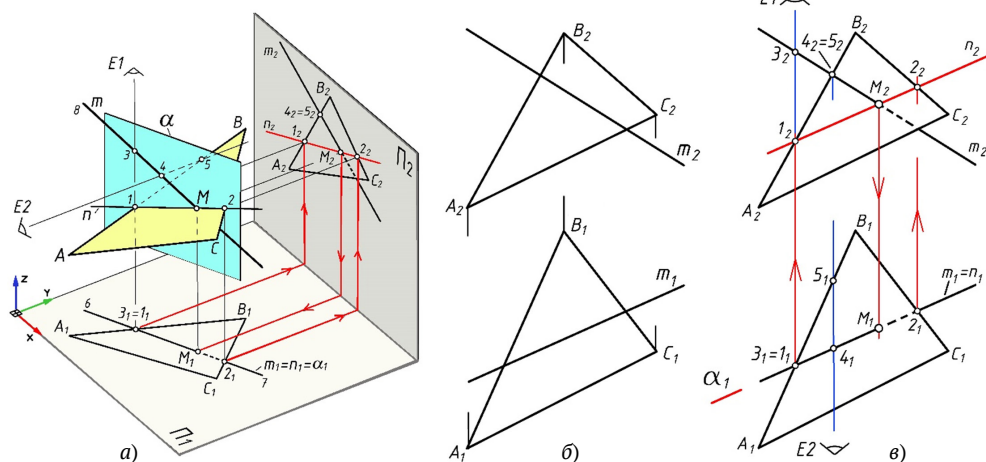


Рис. 5.7. Алгоритм НГ определения точки пересечения прямой и плоскости.

Вариант с горизонтально проецирующей плоскостью:

a – 3D-модель; b – исходные данные на чертеже; v – чертеж с решением

Получены две проекции искомой точки M , т. е. M_1 и M_2 . Задача решена. Те же действия на проекционном чертеже приведены на рис. 5.7б, в. Подробно алгоритм построения чертежа приведен в разделе 6.4. Там же приведен вариант решения, в котором вспомогательная плоскость задана как фронтально проецирующая, а также алгоритмы построения 3D-моделей этих задач.

Построение модели (рис. 5.7а) приведено в разделе 6.4.1.

- Лектору: откройте файлы «Пересечение прямой с плоскостью алгоритм НГ-1 .dwg» (раздел 6.4.1) и «Пересечение прямой с плоскостью алгоритм НГ-2 .dwg» (раздел 6.4.2). Покажите 3D-модели построения чертежей и поясните решение на проекционном чертеже.

5.6. Главные прямые плоскости. Алгоритмы 3D

Главными прямыми плоскости называют прямые уровня (см. раздел 3.3), расположенные в этой плоскости, т. е. горизонталь, фронталь, профильную прямую, а также линию ската, принадлежащие этой плоскости.

5.6.1. Свойства главных прямых

1. Прямые одного типа, проходящие через одну точку, принадлежат единой плоскости уровня (о плоскостях уровня см. раздел 3.5.4). Например, все горизонтали, проходящие через точку A , принадлежат горизонтальной плоскости уровня α (рис. 5.8а) или образуют эту плоскость.

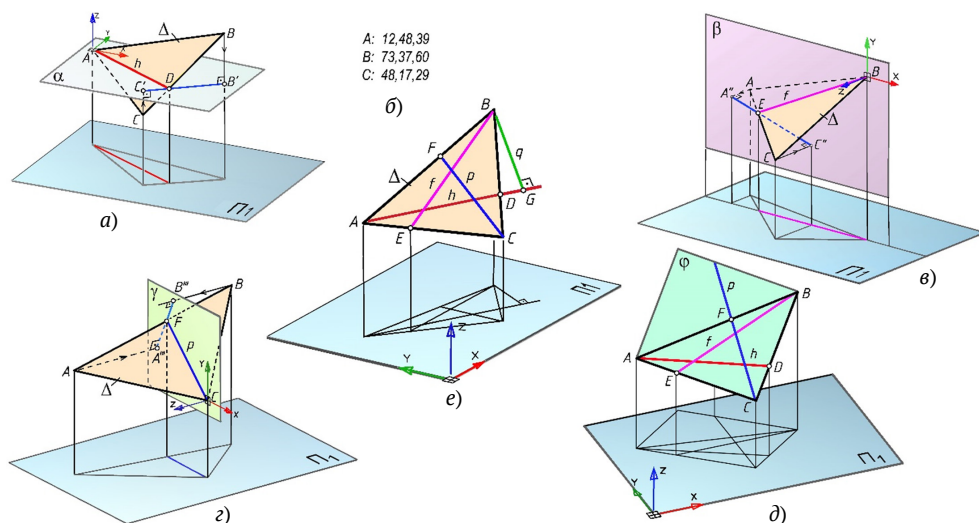


Рис. 5.8. Главные прямые плоскости. Алгоритмы 3D:

а – построение горизонтали; б – координаты в МСК; в – фронталь;
 г – профильная прямая; д – главные прямые как сечения поверхности;
 е – все главные прямые

- В плоскости можно построить множество главных прямых одного типа. Все они будут взаимно параллельны. Например, в плоскости Δ из ее разных точек можно построить множество горизонталей, которые будут параллельны между собой.
- Главная прямая плоскости является линией пересечения плоскости уровня и плоскости, в которой она создается. Например, горизонталь h (см. рис. 5.8а) в плоскости Δ , построенная через заданную точку A , является линией пересечения этой плоскости с горизонтальной плоскостью уровня α , построенной через эту точку.

Линия ската плоскости (ЛС) – это прямая линия наибольшего наклона к горизонтальной плоскости Π_1 . Физический смысл ЛС – это линия, по которой по плоской крыше будет стекать вода или покатится шарик. Геометрическое свойство ЛС: все линии ската плоскости перпендикулярны горизонталям данной плоскости и, следовательно, параллельны между собой. ЛС можно построить из любой точки плоскости.

Исходя из приведенных свойств и возможностей Платформы nanoCAD, рассмотрим два 3D-алгоритма построения главных прямых, проходящих через заданную точку в заданной плоскости, например через точку A в плоскости Δ (рис. 5.8).

5.6.2. Алгоритм 1. На основе пересечения прямой линии с плоскостью

Поскольку главную прямую строим через заданную точку A , то необходимо найти вторую точку искомой прямой. Для этого в плоскости Δ выбираем какой-либо отрезок прямой линии и согласно алгоритму, приведенному в раз-

деле 5.3, находим пересечение этого отрезка с плоскостью уровня, проходящей через точку A . Это будет вторая точка искомой прямой. Плоскость уровня задаем как плоскость XU системы ПСК.

Примером является построение горизонтали h в плоскости, заданной треугольником $\Delta(ABC)$ и вершиной A (рис. 5.8а, б). Задана плоскость уровня α как плоскость XU системы ПСК. Построен отрезок $B'C'$ как ортогональная проекция отрезка BC на плоскость XU . Определена точка D пересечения отрезка BC с его ортогональной проекцией $B'C'$. Искомая горизонталь h построена как отрезок AD .

Для построения фронтали f (рис. 5.8в) выбрана точка B , задана фронтальная плоскость уровня β . Выполнена установка ПСК в эту плоскость. Построена проекция отрезка AC на плоскость β – получен отрезок $A''C''$. На пересечении отрезков AC и $A''C''$ найдена точка E . Искомая фронталь построена как отрезок BE .

Для построения отрезка профильной прямой p (рис. 5.8г) в качестве первой точки отрезка выбрана точка C . Через эту точку задана профильная плоскость уровня γ , в которую установлена плоскость XU ПСК. Построена проекция отрезка AB на плоскость γ – отрезок $A'''B'''$, и найдена точка F пересечения отрезков AB и $A'''B'''$ как вторая точка отрезка p .

На рис. 5.8е показан отрезок q линии ската плоскости Δ . Отрезок построен из точки B как перпендикуляр к отрезку h .

5.6.3. Алгоритм 2. На основе пересечения двух плоскостей

Второй 3D-алгоритм построения главных прямых плоскости основан на применении команды «Сечение» к объектам типа «Поверхность». Для этого в заданной плоскости создается сектор поверхности. Главная прямая находится как линия пересечения этой поверхности с одной из плоскостей МСК, которая воспроизводит плоскость уровня.

Например (рис. 5.8д), для треугольника $\Delta(ABC)$ командой «Выдавливание» создан сектор поверхности ϕ . Горизонталь h получена сечением поверхности плоскостью XU МСК через точку A . Фронталь f – сечением плоскостью ZX через точку B , профильная прямая p – сечением плоскостью YZ через точку C .

Алгоритмы 3D моделей главных прямых рассмотрены в 6.5.1. В разделе 6.5.2 показано построение главных прямых алгоритмом начертательной геометрии.

○ Лектору:

- откройте файл «Главные прямые плоскости .dwg» и покажите модель всех главных прямых (см. раздел 6.5.1);
- в шаблоне постройте треугольник ABC по координатам, приведенным на рис. 5.8б. Выдавливанием постройте сектор поверхности ϕ . Постройте горизонталь как сечение ϕ плоскостью XU и фронталь – сечение ZX (см. раздел 6.5.1).

5.7. Построение линии пересечения плоскостей. Алгоритмы 3D

3D-алгоритмы построения линии пересечения плоскостей основаны на известных геометрических аксиомах:

- 1) две непараллельные плоскости пересекаются по одной прямой линии;
- 2) линия пересечения плоскостей может быть найдена по двум точкам.

Рассмотрим пример пересечения двух плоскостей $\alpha(a \parallel b)$ и $\beta(c \parallel d)$. Каждая плоскость задана двумя отрезками параллельных прямых (рис. 5.9а).

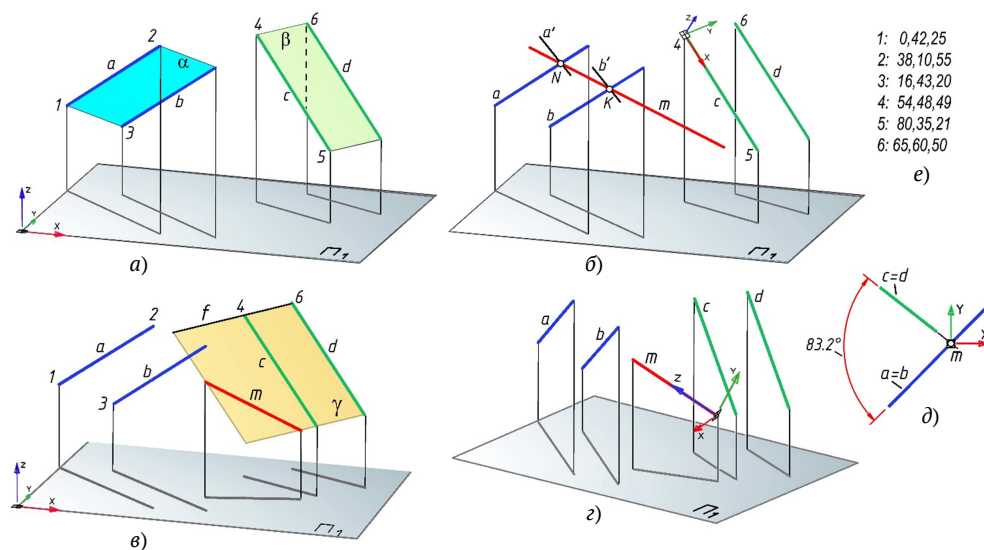


Рис. 5.9. 3D-алгоритмы построения линии пересечения двух плоскостей:
 а – 3D-модель исходных данных; б – алгоритм 1; в – алгоритм 2;
 г – найденная линия пересечения; д – измерение угла между плоскостями;
 е – координаты точек в МСК

5.7.1. Алгоритм 1. На основе пересечения прямых с плоскостями

В заданных плоскостях выбираем две прямые. Это могут быть прямые одной из плоскостей или по одной прямой от каждой плоскости. Применяем алгоритм построения точек пересечения прямой с плоскостью (см. выше, раздел 5.3) и находим точки пересечения прямых с плоскостями. Получаем две точки искомой линии пересечения плоскостей.

Реализация алгоритма показана на рис. 5.9б. В плоскости α выбраны прямые a, b . В плоскость β , заданную прямыми c, d , по точкам 4, 5, 6, установлена ПСК, т. е. плоскость XY стала плоскостью β . Применением панели «Свойства» или команды «Конвертирование в 2D» (см. выше, раздел 5.2) построены ортогональные проекции прямых a, b на плоскость XY ПСК – отрезки a', b' . На пересечении прямых со своими проекциями найдены точки K, N искомой линии m пересечения плоскостей.

Построение модели приведено в разделе 6.6.1.

5.7.2. Алгоритм 2. На основе вспомогательной поверхности

Основан на возможности применения команды «Сечение» к объектам типа «Поверхность». Одну из плоскостей представляют как объект этого типа. Это

достигается применением команды «Выдавливание» к одному из отрезков плоскости. Выдавливание выполняется по траектории, задаваемой дополнительным отрезком. Две точки отрезка траектории задают в плоскости, для которой создается поверхность. Точки, а также длина отрезка траектории подбираются экспериментально так, чтобы создаваемая поверхность пересекала вторую плоскость. Остается построить сечение поверхности второй плоскостью. В зависимости от траектории в сечении будут построены различные отрезки, но все они будут принадлежать единой линии пересечения плоскостей. Реализация второго алгоритма показана на рис. 5.9в. В плоскости β для выдавливания выбран отрезок d . В той же плоскости по точкам 4, 6 построен дополнительный отрезок f как траектория выдавливания. Положение и длина отрезка f определены экспериментально. Командой «Выдавливание» с опцией «Траектория» построен сектор плоскости γ . Применена команда «Сечение» с опцией «Три точки», объектом сечения указан сектор γ , секущая плоскость задана точками 1, 2, 3. После построения сечения сектор γ можно удалить (рис. 5.9г). Остался отрезок m искомой линии пересечения плоскостей.

- Лектору: откройте файл «Пересечение плоскостей .dwg» (см. раздел 6.6.1) и постройте линию пересечения плоскостей алгоритмом 2.

5.7.3. Алгоритм 3. Преобразование в солиды

Алгоритм предназначен для пересечения плоских фигур, заданных замкнутыми контурами. К контурам применяют команду «Выдавливание», что приводит к созданию солидов. Выдавливание выполняется на минимальную величину, т. е. образующиеся солиды предельно тонкие. К солидам применяют команду «Объединение», что приводит к возникновению искомой линии пересечения.

Действие алгоритма показано на примере построения линии взаимного пересечения двух треугольников (рис. 5.10а). Замкнутые контуры треугольников построены из отрезков или как полилинии. Выполнено выдавливание контуров на 0.001. Получены солиды с этой толщиной. Объединение солидов привело к появлению линии пересечения в виде двух отрезков. Расстояние между ними определяется величиной выдавливания. Ввиду малого расстояния между отрезками этой погрешностью можно пренебречь.

На рис. 5.10б показан автоматически построенный чертеж модели треугольников, полученный командами «2D Вид» и «2D Проекционный вид» с последующим оформлением чертежа (см. также раздел 5.2.4).

Построение линии пересечения позволяет наглядно отобразить угол между плоскостями. Это показано на рис. 5.9д и 5.10г. Об измерении угла между плоскостями см. раздел 7.1.2.

Построение 3D-модели и чертежа рассмотрено в разделе 6.6.2.

5.7.4. Проверка правильности построения линии пересечения.

Линия пересечения плоскостей – это их общая линия. Поэтому для проверки и доказательства правильности нахождения линии пересечения необходимо проверить ее принадлежность каждой из плоскостей. Для этого следует уста-

новить ПСК в одну из плоскостей и командой «Список» или в панели «Свойства» убедиться, что Z-координаты концов отрезка линии пересечения равны нулю. Затем повторить проверку для второй плоскости.

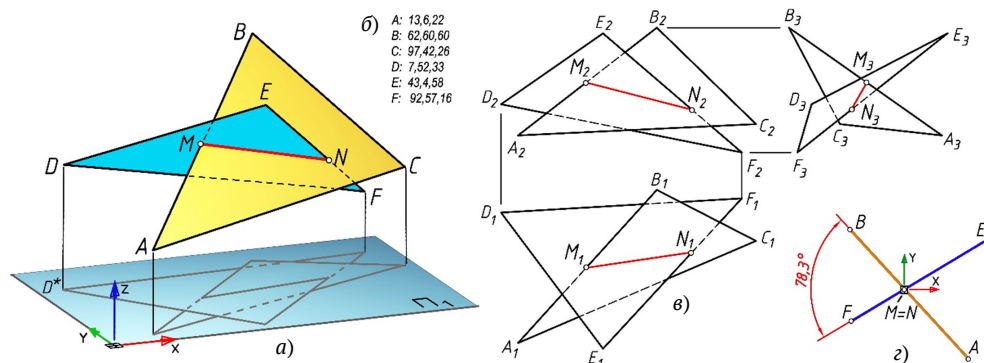


Рис. 5.10. Пересечение треугольников. Пример алгоритма 3:
 а – 3D-модель; б – координаты точек в МСК; в – автоматизированный чертеж;
 z – угол между треугольниками

○ Лектору:

- откройте файл «Пересечение треугольников .dwg» (см. раздел 6.6.2) и постройте линию пересечения;
- откройте файл «Пересечение плоскостей. Алгоритм НГ .dwg». Покажите раздел 6.6.3. Объясните метод НГ построения линии пересечения плоскостей.

5.8. Построение взаимно перпендикулярных объектов. Алгоритмы 3D

Два объекта взаимно перпендикулярны, если угол между ними составляет 90°. Рассмотрим следующие варианты построения взаимно перпендикулярных объектов: двух прямых, прямой и плоскости, двух плоскостей.

Задачи на перпендикулярность рассматриваются в курсе начертательной геометрии (НГ) как одни из наиболее сложных. Мы привели эти задачи в разделе 6.8. В данной лекции рассмотрим построение перпендикулярных объектов в Платформе nanoCAD средствами 3D-моделирования. В отличие от методов НГ эти построения выполняются просто и наглядно.

Построение перпендикулярных объектов в nanoCAD основано на применении средств ортогонального проецирования, объектной привязки «Нормаль», задании ПСК опцией «Z-Ось», применении режима «ОПТО». Рассмотрим характерные задачи на перпендикулярность.

5.8.1. Перпендикуляр к прямой линии

Требуется построить отрезок из заданной точки, пересекающий заданную прямую под прямым углом. Для решения достаточно при задании второй точки отрезка указать заданный отрезок с объектной привязкой «Нормаль». Вычис-

читель Платформы nanoCAD определит вторую точку и построит отрезок под прямым углом к заданному. Если заданный отрезок имеет недостаточную длину, то перпендикуляр автоматически создается к продолжению этого отрезка. Алгоритм построения перпендикуляра к прямой линии приведен в разделе 6.8.1.

После построения перпендикулярного отрезка можно в панели «Свойства» регулировать его длину и расстояние до точки пересечения отрезков.

- Лектору: по координатам (см. раздел 6.8.1) постройте отрезок, точку и опустите перпендикуляр из точки на отрезок.

Примером на построение перпендикулярного отрезка является задача создания ромба, для которого задана сторона AB и направление диагонали f (рис. 5.11а). Решение основано на свойствах ромба: ромб – плоский четырехугольник, длины его сторон равны между собой, противоположные стороны взаимно параллельны, диагонали ромба взаимно перпендикулярны и в точке пересечения делятся пополам.

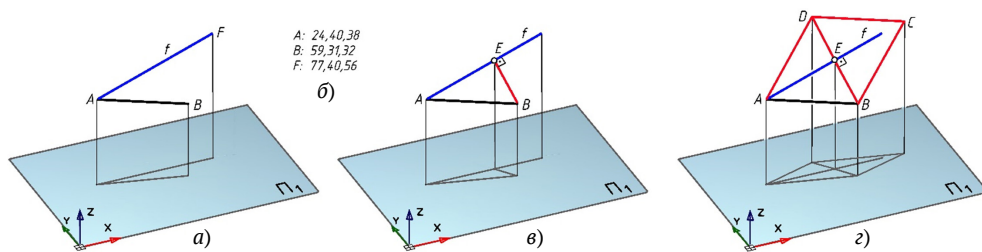


Рис. 5.11. Построение 3D-модели ромба:

а – дано; б – координаты точек в МСК;
в – построение второй диагонали; г – итоговая модель

Решение начинается с построения половины второй диагонали как отрезка BE, проведенного из точки B перпендикулярно первой диагонали f . Перпендикулярность задается объектной привязкой «Нормаль». Копированием отрезка BE создается вторая половина диагонали и находится точка D (рис. 5.11в). Далее выполняется копирование сторон, что реализует параллельность противоположных сторон и равенство всех сторон ромба (рис. 5.11г).

Алгоритм построения 3D-модели ромба и ее проверка, а также алгоритм начертательной геометрии построения ромба рассмотрены в разделах 6.8.2, 6.8.3.

- Лектору:
 - откройте файл «Ромб .dwg». Показать построение ромба;
 - покажите раздел 6.8.3, в котором показано решение методами начертательной геометрии.

5.8.2. Перпендикуляр к плоскости. Алгоритм 3D

Задача имеет два варианта. Первый – опустить перпендикуляр на заданную плоскость. Другими словами, построить отрезок из заданной точки, распо-

женный под прямым углом к заданной плоскости, при этом вторая точка отрезка должна принадлежать этой плоскости.

Второй вариант – из заданной точки, принадлежащей плоскости, восстановить перпендикуляр к этой плоскости, т. е. построить отрезок, ей перпендикулярный и имеющий заданную длину.

Построения основаны на том, что если установить ПСК по трем точкам заданной плоскости, то в режиме «ОРТО» искомый отрезок будет расположен параллельно оси Z . Начальная и конечная точки отрезка имеют соответственно равные значения X, Y -координат. Отличаются лишь Z -координаты точек. Для первой точки отрезка Z -координата определяется заданной точкой, из которой проводится отрезок. Если требуется опустить перпендикуляр на плоскость, то для второй точки необходимо задать $Z = 0$. Если требуется восстановить перпендикуляр из точки плоскости на заданную длину, то для второй точки Z -координата должна быть равна длине отрезка.

В обоих вариантах отрезок перпендикуляра начинают строить из заданной точки в режиме «ОРТО» параллельно оси Z . Затем в панели «Свойства» редактируют Z -координату второй точки.

На рис. 5.12а, б показана 3D-модель перпендикуляра, опущенного из точки P на плоскость $\triangle(ABC)$. ПСК установлена по точкам A, C, B . Включен режим «ОРТО». Из точки P построен отрезок некоторой произвольной длины, параллельный оси Z . Затем в панели «Свойства» (рис. 5.12в) конечной точки отрезка задано значение $Z = 0$. В результате построения найдено основание перпендикуляра – точка P' . По 3D-модели командой «2D Вид» построен автоматизированный чертеж модели (рис. 5.12г).

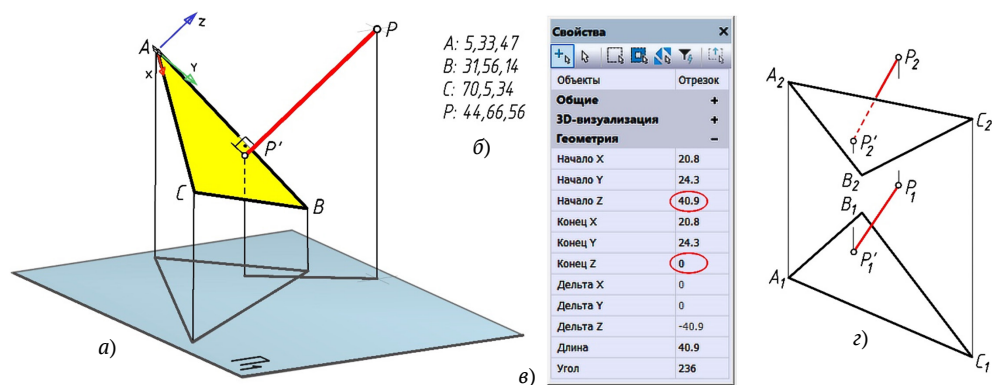


Рис. 5.12. Построение перпендикуляра из точки к плоскости:
 а – 3D-модель; б – координаты точек в МСК;
 в – панель «Свойства» для отрезка перпендикуляра в ПСК;
 г – автоматизированный чертеж

В панели свойств видим, что координаты X, Y начальной и конечной точек отрезка взаимно равны. Это подтверждает, что отрезок перпендикулярен плоскости. Координата Z конечной точки равна 0, т. е. точка находится в плоскости

$\Delta(ABC)$ и является основанием перпендикуляра. Координата Z начальной точки отрезка равна длине отрезка.

Если нужно восстановить перпендикуляр к плоскости в заданной точке, то известно основание перпендикуляра, например точка P' . В режиме «ОРТО» из этой точки строим либо отрезок заданной длины, либо отрезок произвольной длины с последующим редактированием Z -координаты в панели «Свойства». В результате находим точку P .

В панели «Свойства» можно дополнительно регулировать расстояние отрезка до плоскости и длину отрезка. При этом сохраняется прямой угол между отрезком и плоскостью.

Свойство прямых, перпендикулярных плоскости

Прямая, перпендикулярная плоскости, образует прямой угол с любой прямой этой плоскости. Если прямые пересекаются в точке основания перпендикуляра, то угол между прямыми – это «обычный» угол между пересекающимися прямыми. Прямые могут не пересекаться, тогда угол определяется как между скрещивающимися прямыми. Например, на рис. 5.12а отрезок PP' образует прямой угол с каждой из сторон треугольника $\Delta(ABC)$.

В разделе 6.8.4 приведен алгоритм построения рассмотренной 3D-модели перпендикуляра к плоскости. В разделе 6.8.5 приведен алгоритм построения той же модели методами начертательной геометрии.

○ Лектору:

- откройте файл «Перпендикуляр к плоскости .dwg» (см. раздел 6.8.4) и постройте перпендикуляр из точки на плоскость треугольника;
- восстановите перпендикуляр к плоскости из произвольной точки плоскости;
- покажите алгоритм начертательной геометрии построения перпендикуляра (см. раздел 6.8.5).

5.8.3. Плоскость, перпендикулярная прямой, и касательная плоскость

Чтобы построить плоскость, перпендикулярную отрезку в заданной точке, нужно установить ПСК с направлением оси Z вдоль этого отрезка. Начало координат задать в точке отрезка, через которую должна проходить плоскость. Тогда искомая плоскость – это плоскость XY ПСК. Для фиксации найденной плоскости следует в плоскости XY ПСК построить объекты, например две пересекающиеся прямые, три точки и др. или сохранить ПСК как именованную.

Примером является плоскость α , касательная к сфере (рис. 5.13а). Из школьного курса стереометрии известно определение этой плоскости как имеющей лишь одну общую точку со сферой. Свойство такой плоскости – она перпендикулярна к отрезку радиуса сферы в точке касания. В точку A , заданную на поверхности сферы, установлена ПСК применением опции «Направление оси Z ». Ось Z установлена вдоль отрезка радиуса сферы. Начало задано в точке касания. Для визуализации плоскости в ней построен квадрат.

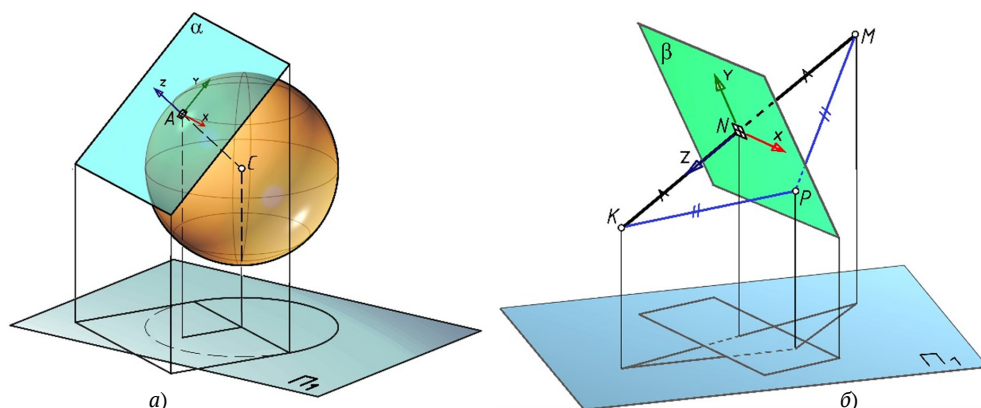


Рис. 5.13. Плоскости, перпендикулярные прямой.

3D-модели: а – плоскость, касательная к сфере;

б – плоскость, все точки которой равноудалены от двух точек

Второй пример – плоскость β (рис. 5.13б), все точки которой равноудалены от двух заданных точек K, M . Эта плоскость проходит через середину отрезка между точками перпендикулярно этому отрезку. В нашем курсе такие плоскости будут применяться при решении комплексных задач (см. раздел 7.3.2). Для построения установлена ПСК применением опции «Направление оси Z». Начало координат задано в точке N , являющейся серединой отрезка KM . Ось Z направлена вдоль отрезка в его конечную точку K . Полученная плоскость XY является искомой плоскостью β . В плоскости XY для наглядности построен квадрат и задана произвольная точка P . Построены отрезки PK и PM , позволяющие убедиться, что расстояние точки P до концов отрезка KM , равное длинам этих отрезков, равны между собой.

Построение рассмотренных 3D-моделей приведено в разделах 6.8.6, 6.8.7. В разделе 6.8.8 дополнительно показано построение пирамиды, основание которой перпендикулярно одному из ее ребер. В разделе 6.8.9 показано построение плоскости, перпендикулярной прямой линии, выполняемое алгоритмом НГ.

○ Лектору:

- откройте файл «Плоскость касательная к сфере .dwg» (см. раздел 6.8.6) и покажите 3D-модель плоскости, касательной к сфере;
- в шаблоне задайте плоскость, точки которой равноудалены от точек 0,0,0 и 100,70,70. Задайте произвольную точку в плоскости и покажите ее равноудаленность от заданных точек;
- откройте файл «Пирамида .dwg» (см. раздел 6.8.8) и покажите и объясните 3D-модель пирамиды. По раздел 6.8.9 объясните построение пирамиды алгоритмом НГ.

5.8.4. Взаимно перпендикулярные плоскости

Две плоскости взаимно перпендикулярны, если линейная величина двугранного угла, образованного ими, равна 90° . Примером являются координатные плоскости нашего шаблона, в котором $\Pi_1 \perp \Pi_2$, $\Pi_1 \perp \Pi_3$, $\Pi_2 \perp \Pi_3$. Построение пер-

пендикулярных плоскостей основано на их свойстве, известном из школьного курса геометрии: плоскость, содержащая в себе перпендикуляр к другой плоскости, перпендикулярна к этой плоскости.

Рассмотрим три задачи на построение взаимно перпендикулярных плоскостей.

Задача 1. Задать плоскость γ , перпендикулярную плоскости α и проходящую через точку A .

На рис. 5.14а показана 3D-модель этой задачи. Для ее решения построен перпендикуляр AP к плоскости α . Построена плоскость γ , содержащая отрезок AP и поэтому перпендикулярная плоскости α . Таких плоскостей множество, все они образованы вращением плоскости γ вокруг отрезка AP . Для наглядности в плоскости γ построен прямоугольник и массив этих прямоугольников, образованный их вращением вокруг отрезка AP . Поскольку все прямоугольники массива содержат в себе перпендикуляр AP к плоскости α как ось вращения, они перпендикулярны к этой плоскости.

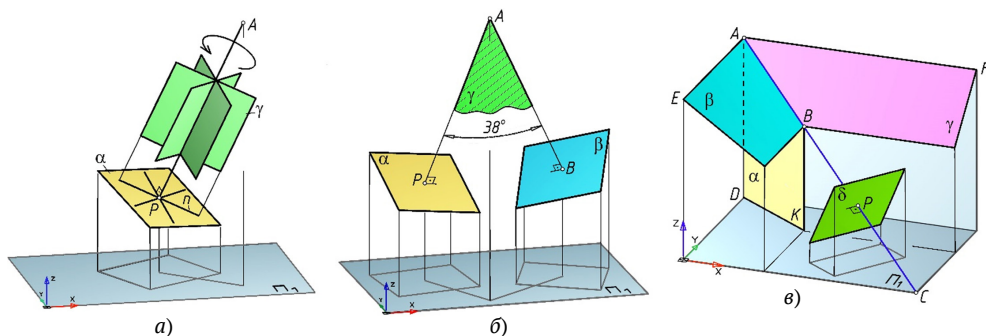


Рис. 5.14. Взаимно перпендикулярные плоскости. Алгоритм 3D:

- а – массив плоскостей, перпендикулярных одной плоскости;
- б – плоскость, перпендикулярная двум плоскостям;
- в – плоскости, перпендикулярные заданной плоскости и одной из координатных плоскостей

Линии пересечения плоскостей массива γ с плоскостью, к которой построен перпендикуляр, проходят через основание перпендикуляра. В рассматриваемой модели это отрезки n , которые проходят через основание перпендикуляра AP – точку P .

Задача 2. Построить плоскость γ , проходящую через точку A и перпендикулярную двум плоскостям α и β .

Модель построения плоскости γ приведена на рис. 5.14б. Из точки A на плоскости α и β опущены перпендикуляры соответственно AP и AB . Искомая плоскость γ образована этими перпендикулярами как пересекающимися прямыми. Поскольку плоскость γ содержит в себе оба перпендикуляра, то она перпендикулярна обоим плоскостям и для точки A является единственным решением задачи.

На модели показан угол между перпендикулярами AP и AB . Он является линейной величиной двугранного угла между плоскостями α и β .

Задача 3. Построить плоскости α, β, γ , проходящие через точку A . Каждая из плоскостей перпендикулярна плоскости δ и одной из координатных плоскостей Π_1, Π_2, Π_3 .

Решение приведено на рис. 5.14в. Оно, как и прежде, основано на приведенном выше свойстве перпендикулярных плоскостей, т. е. искомые плоскости должны содержать в себе перпендикуляр к плоскости δ . Из точки A построен общий для трех искомых плоскостей отрезок AP , являющийся перпендикуляром к плоскости δ . Поэтому все три искомые плоскости перпендикулярны плоскости δ . (Для наглядности 3D-модели плоскость δ задана так, что перпендикуляр AP к ней является частью диагонали AC призмы, определяемой координатными плоскостями.)

Для каждой из искомых плоскостей дополнительно построен перпендикуляр к одной из координатных плоскостей, который включен в определение этой плоскости. Поэтому искомые плоскости являются проецирующими. Для горизонтально проецирующей плоскости α построен отрезок $AD \perp \Pi_1$, т. е. плоскость α определена двумя перпендикулярами ($AP \cap AD$), в итоге $\alpha \perp \delta$ и $\alpha \perp \Pi_1$. Для фронтально проецирующей плоскости β построен отрезок $AE \perp \Pi_2$, β ($AP \cap AE$), поэтому $\beta \perp \delta$ и $\beta \perp \Pi_2$. Для профильно проецирующей плоскости γ построен отрезок $AF \perp \Pi_3$, γ ($AP \cap AF$), следовательно, $\gamma \perp \delta$ и $\gamma \perp \Pi_3$.

Для наглядности модели построены отсеки найденных плоскостей в виде трапеций. Для них на отрезке AP задана точка B . Например, для плоскости α это трапеция $ABKD$.

Во всех задачах на перпендикулярность плоскости являются перпендикулярными *взаимно*. Например, на рис. 5.14а плоскость α содержит прямые, перпендикулярные к каждой из плоскостей массива γ , и поэтому перпендикулярна каждой из них. На рис. 5.14б каждая из плоскостей α и β перпендикулярна плоскости γ .

Алгоритмы построения рассмотренных 3D-моделей приведены в разделе 6.8.10. Там же приведен пример построения задачи 2 методами начертательной геометрии.

○ Лектору:

- откройте файлы «Перпендикулярные плоскости Массив .dwg», «Плоскость, перпендикулярная двум .dwg» и «Три перпендикулярные плоскости .dwg» (см. раздел 6.8.10) и объясните построение моделей;
- по рис. 6.10 кратко объясните построения плоскости, перпендикулярной двум другим, выполняемые алгоритмом НГ.

5.9. Теорема о проецировании прямого угла

Теорема отражает одно из свойств ортогонального проецирования. Теорема является основой для решения задач на перпендикулярность методами начертательной геометрии (см. разделы 6.8.5, 6.8.9, 6.8.10). Под термином «прямой угол» понимаются два пересекающихся отрезка, если в точке пересечения угол между ними составляет 90° .

Теорема: «Если одна сторона прямого угла параллельна плоскости проекции, то на эту плоскость прямой угол проецируется в прямой».

Приведем доказательство теоремы на примере горизонтали (рис. 5.15а). Дано: угол $\angle a, h$ – прямой, где h – горизонталь, b – отрезок прямой общего положения. Отрезки a_1, h_1 – проекции сторон угла на плоскость Π_1 . Доказать, что угол $\angle a_1, h_1$ также является прямым.

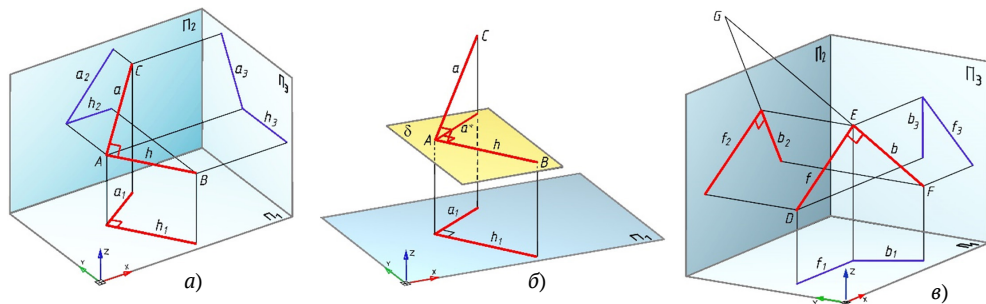


Рис. 5.15. Модели к теореме о проецировании прямого угла:
а, б – модель с горизонталью; в – с фронталью

Рассмотрим плоскость δ , параллельную Π_1 и включающую в себя горизонталь h . По отношению к плоскости δ отрезок a является отрезком наклонной прямой. Построим проекцию отрезка a на плоскость δ – отрезок a^* – и применим теорему о трех перпендикулярах (см. школьный курс геометрии): «Если отрезок прямой в плоскости перпендикулярен к наклонной прямой, то он также перпендикулярен к проекции наклонной на эту плоскость». Следовательно, h перпендикулярен к a^* . То есть $\angle a^*, h$ – прямой. Углы $\angle a^*, h$ и $\angle a_1, h_1$ равны как углы с соответственно параллельными сторонами. Следовательно, угол $\angle a_1, h_1$ также является прямым.

Если стороной прямого угла $\angle f, b$ является фронталь f (рис. 5.15в), то, поскольку она параллельна Π_2 , угол проецируется в прямой угол на плоскость Π_2 .

На плоскости, не отвечающие условиям теоремы, прямой угол отображается либо в острый, либо в тупой. Например (см. рис. 5.15а), угол $\angle a_2, h_2$ – острый, угол $\angle a_3, h_3$ – тупой. В примере с фронталью (см. рис. 5.15в) угол $\angle f_1, b_1$ – тупой, угол $\angle f_3, b_3$ – острый.

Построение моделей (рис. 5.15) приведено в разделе 6.8.11.

- Лектору: откройте файлы «Проецирование прямого угла Горизонталь .dwg» и «Проецирование прямого угла Фронталь .dwg» (см. раздел 6.8.11). Поясните доказательство теоремы.

Вопросы для самоконтроля к лекции 3

1. Приведите примеры задач, решаемых ортогональным проецированием.
2. Приведите примеры задач, решаемых косоугольным проецированием.
3. Как найти точку пересечения прямой линии с плоскостью?
4. Как построить линию пересечения двух плоскостей?

5. Построение линии пересечения плоскостей применением косоугольного проецирования.
6. Что называют главными прямыми плоскости? 3D-алгоритм их построения.
7. Как построить плоский пятиугольник, для которого заданы координаты трех вершин, а еще две вершины заданы своими фронтальными (или горизонтальными) проекциями?
8. Как доказать, что построенная линия является линией пересечения плоскостей?
9. Что называют линией ската и как ее построить?
10. Как построить перпендикуляр к плоскости?
11. Как построить плоскость, перпендикулярную прямой линии?
12. Построение плоскости, перпендикулярной двум другим плоскостям.
13. Теорема о проецировании прямого угла. Содержание теоремы и ее применение.
14. Как опустить перпендикуляр из точки на прямую? Алгоритм 3D.
15. Как построить ромб, если задана его сторона и направление одной из диагоналей?
16. Алгоритм 3D-построения перпендикуляра заданной длины из заданной точки плоскости к этой плоскости.
17. Алгоритм построения плоскости, перпендикулярной заданному отрезку прямой и проходящей через конечную точку этого отрезка.
18. Как проверить, что отрезок перпендикулярен плоскости и что плоскость перпендикулярна отрезку прямой?

ГЛАВА 6

Приложение к лекции 3: Проецирование. Пересечение. Перпендикулярность

Приводятся материалы, дополняющие лекцию 3, и примеры решения задач по теме этой лекции.

6.1. 3D-модели проецирования точки и отрезка

Рассмотрим алгоритмы построения моделей к мультимедийной лекции 3 и примеры решения задач на их основе.

6.1.1. Модель к рис. 5.1а «Ортогональное и косоугольное проецирование»

Координаты точек в МСК: $A(0.7, 30, 40)$; $B(79, 19, 27)$; $C(76, 64, 94)$.

Координаты точек в ПСК (ABC): $D(59, 52, 110)$; $E(41, 32, 58)$; $D''(65, 32)$; $D'''(53, 10)$.

- ◆ Создайте новый файл на основе шаблона.

Построим треугольник ABC:

- ◆ Построение \ Черчение \ 3D-полилиния  \ Укажите точку: введите координаты точки A \ точка B \ точка C \ Замкнуть – построен контур треугольника ABC.

Построение отрезка DE и его ортогональной проекции на плоскость треугольника. Применим команду «Конвертирование в 2D»:

- ◆ Вид \ Координаты \ ПСК \ 3 точки  \ Новое начало координат: с объектной привязкой укажите точку A \ Укажите точку по оси X: точка B \ Укажите точку с положительной Y-координатой: точка C – ПСК установлена в плоскость треугольника ABC (см. рис. 5.1а);
- ◆ Главная \ Отрезок \ введите координаты точки D \ координаты точки E – построен отрезок DE;
- ◆  – Создайте копию отрезка DE с перемещением 0,0,0;

- ◆  \ Утилиты \ Конвертирование в 2D \ укажите отрезок DE – построена ортогональная проекция отрезка – отрезок $D'E'$.

Строим косоугольную проекцию отрезка DE на плоскость треугольника ABC . Применим алгоритм на основе команды «Выдавливание». Для этого построим отрезок DD'' как направление проецирования и траекторию выдавливания. Создадим сектор поверхности выдавливанием отрезка DE по траектории DD'' . Построим сечение сектора поверхности плоскостью треугольника:

- ◆ Отрезок  \ укажите точку D \ введите координаты D'' – построен отрезок DD'' ;
- ◆ 3D-инструменты \ Прямое моделирование \ Выдавливание  \ Выберите объект для выдавливания: укажите отрезок DE \ Траектория \ выберите траекторию выдавливания: с привязкой «Ближайшая» укажите отрезок DD'' – построен сектор поверхности;
- ◆ 3D-инструменты \ Прямое моделирование \ Сечение  \ укажите сектор поверхности \ 3 точки \ с объектной привязкой укажите точки A, B, C – построен отрезок $D''E''$, являющийся косоугольной проекцией отрезка DE в направлении DD'' ;
- ◆ сектор поверхности сотрите;
- ◆ повторите построение для создания косоугольной проекции $D'''E'''$.

Построенный отрезок DE и его три проекции удлините до взаимного пересечения. При правильных построениях пересечение произойдет в одной точке – точке F (см. рис. 5.1а):

- ◆ Построение \ Редактирование \ Увеличение  \ Динамика \ последовательно тяните отрезки до взаимного пересечения;
- ◆ придайте модели наглядность (см. раздел 2.22).

Построение модели пересечения треугольников, приведенной на рис. 5.1б, – см. разделы 5.10 и 6.6.2.

- ◆ Файл модели сохраните с именем «Орто и Косоугольное проецирование отрезка .dwg».

6.1.2. Модель к рис. 5.2 «Ортогональное проецирование»

Координаты точек в МСК: $A(24, 64, 43)$; $B(50, 16, 20)$; $C(80, 30, 66)$; $D(14, 18, 68)$; $E(32.4, 2.8, 60)$; $F(28.9, 1.7, 91)$.

- ◆ Создайте новый файл на основе шаблона.

Строим треугольник ABC , точку D и отрезок EF :

- ◆ Построение \ Черчение \ 3D-полилиния  \ введите координаты точки A \ точка B \ точка C \ Замкнуть – построен контур треугольника ABC ;
- ◆ Точка  \ введите координаты точки D – построен маркер точки D ;
- ◆ Отрезок \ введите координаты точек E, F – построен отрезок EF .

Строим ортогональные проекции точки D и отрезка EF на плоскость треугольника. Применим редактирование через функциональную панель «Свойства»:

- ◆ Вид \ Координаты \ ПСК \ 3 точки  \ Новое начало координат: с объектной привязкой укажите последовательно точки A, B, C – ПСК установлена в плоскость треугольника ABC (см. рис. 5.2a);
- ◆  Копирование \ Создайте копии точки D и отрезка DE с перемещением 0,0,0;
- ◆ укажите отрезок EF \ контекстное меню \ Свойства.

В панели «Свойства» в разделе «Геометрия» отображены координаты конечных точек отрезка EF в текущей ПСК (рис. 5.2б):

- ◆ на строках «Начало Z » и «Конец Z » замените значения «Начало Z » и «Конец Z » на 0 (ноль) (рис. 5.2в) – создана проекция отрезка;
- ◆ укажите маркер точки D , создайте ее копию. В панели «Свойства» редактированием Z -координаты точки D создайте ее проекцию;
- ◆ придайте модели наглядность (см. раздел 2.22).

Для построения проекций точки и отрезка можно вместо панели «Свойства» применить команду «Конвертирование в 2D». Рационально ее применение для проекции треугольника на Π_1 . Треугольник может быть объектом типа «Полилиния», «3D-полилиния» или «Область»:

- ◆ создайте копию треугольника;
- ◆  \ Утилиты \ Конвертирование в 2D \ укажите треугольник – построена его проекция с сохранением типа объекта;
- ◆ файл модели сохраните с именем «Орто проецирование отрезка на треугольник .dwg».

6.1.3. Применение координатных фильтров

Координатные фильтры применяются для построения проекций точек в МСК. Тип проекции задается выбором фильтра. Для горизонтальной проекции применяется фильтр XY , для фронтальной – фильтр XZ . Рассмотрим три примера.

Пример 1: построить горизонтальную проекцию точки $D(50, 35, 50)$:

- ◆ должна быть установлена МСК. Точка задана маркером;
- ◆ Точка  \ Shift + ПКМ \ в открывшемся контекстном меню укажите строку «Координатные фильтры» \ в меню выбора фильтров укажите фильтр $.XY$ \ вновь Shift + ПКМ с привязкой «Узел» укажите маркер проецируемой точки D \ в командной строке появился запрос (требуется Z) \ укажите любую точку плоскости XY – построен маркер точки $D'(50, 35, 0)$, расположенной в плоскости XY .

Пример 2: построить горизонтальную проекцию отрезка AB , если координаты его конечных точек $A(30, 10, 20)$ и $B(75, 55, 55)$:

- ◆ построить отрезок AB ;
- ◆ Отрезок  \ Первая точка: фильтр $.XY$ \ с привязкой «Конточка» укажите точку A \ требуется Z : укажите любую точку плоскости XY \ следующая точка: фильтр $.XY$ \ с привязкой «Конточка» укажите точку B \ требуется Z :

укажите любую точку плоскости XY – построена горизонтальная проекция отрезка AB . Это отрезок $((30, 10, 0)(75, 55, 0))$.

Пример 3: построить фронтальную проекцию отрезка AB . Для фронтальной проекции необходимо применить фильтр XZ . При выполнении команды потребуется указать точку, определяющую положение фронтальной плоскости. Это может быть точка на контуре Π_2 шаблона или маркер предварительно построенной точки с заданной глубиной. Воспользуемся шаблоном:

- ◆ по-прежнему установлена МСК. Построен отрезок AB с прежними координатами;
- ◆ Отрезок \ Первая точка: фильтр XZ \ с привязкой «Конточка» укажите точку A \ требуется Y : укажите любую точку контура Π_2 \ Следующая точка: фильтр XZ \ с привязкой «Конточка» укажите точку B \ требуется Y : укажите любую точку контура Π_2 – построена проекция отрезка на Π_2 .

Поскольку глубина Π_2 в шаблоне равна 70, то построенный отрезок фронтальной проекции в МСК имеет координаты $((30, 70, 20)(75, 70, 55))$.

6.2. Алгоритм автоматизированного построения чертежа точек и отрезков

Рассмотрим алгоритм автоматического построения чертежа 3D-моделей, содержащих точки, линейные объекты (отрезки прямых линий, окружностей и др.) и плоские фигуры (см. раздел 5.2.4) на примере двух моделей – см. рис. 5.3 и 5.4.

6.2.1. Общий алгоритм

1. Подготовьте 3D-модель:
 - а) оставьте в модели только те объекты, которые необходимо отобразить на чертеже, остальные перенесите на дополнительные слои и заморозьте или изолируйте (скройте);
 - б) если на чертеже необходимо отобразить точки, то в них поставьте сферы радиусом 0.5...1, тогда на чертеже они будут показаны как окружности того же радиуса;
 - в) плоские контуры, например треугольники, создайте как замкнутые полилинии или области.
2. Выполните выдавливание линий (отрезков) для формирования из них полосок поверхностей:
 - а) установите МСК, ортогональный вид сверху, визуальный стиль «Концептуальный»;
 - б) проверьте или задайте системную переменную $delobj = 3$ – это приведет к удалению исходной геометрии при выдавливании и придании толщины. Иначе исходные объекты (отрезки) останутся и будут «перегружать» чертеж; имя переменной нужно ввести с командной строки и затем ввести ее значение;

- в) при выполнении команды «Выдавливание» задайте опцию «Направление» и две точки вдоль оси Z . Величина и направление выдавливания должны быть едиными для всех объектов модели. Оптимальное значение величины выдавливания 0.001. С увеличением снижается точность чертежа, с уменьшением могут возникнуть ошибки команды моделирования;
 - г) если отрезки модели при выдавливании образуют замкнутые контуры, которые в результате выдавливания должны остаться отдельными объектами, то выдавливание таких отрезков следует делать поочередно, не допуская образования из контуров единого 3D-солида.
3. К поверхностям, созданным выдавливанием, примените команду «Толщина». Это преобразует объекты из типа «Плоскость» в «3D-солид». Толщину следует задать единой для всех объектов, равной той же, что и при выдавливании 0.001.
 4. Командой «Объединение» создайте единый 3D-солид из всех объектов. Это позволит на чертеже отобразить видимость и пересечение объектов модели.
 5. Для созданного 3D-солида по известному алгоритму (см. раздел 1.8.2) стройте проекции чертежа командами группы «2D-виды» и оформляйте чертеж.

6.2.2. Чертеж модели к рис. 5.2 и 5.3 (раздел 5.2) «Ортогональное проецирование».

Удаление повторяющихся линий

Файл модели «Орто проецирование отрезка на треугольник .dwg» был создан и сохранен (см. раздел 6.1.2):

- ◆ создайте копию файла модели;
- ◆ координатную плоскость Π_1 и проекции на ней в чертеж не включим, поэтому эти объекты изолируйте (скройте) или заморозьте слой, на котором они расположены.

В маркер точки D поставьте сферу:

- ◆ 3D-инструменты \ Режимы моделирования \ Прямое \ Прямое моделирование \ Сфера  \ Центр: укажите маркер точки D \ Радиус: 1.

Применяем команды «Выдавливание», «Толщина», «Объединение»:

- ◆ установите МСК и вид сверху;
- ◆ убедитесь, что контур треугольника является замкнутым, рекомендуем предварительно создать из него 2D- или 3D-полилинию или область;
- ◆ с командной строки введите имя системной переменной delobj и задайте ее равной 3;
- ◆ 3D-инструменты \ Прямое моделирование \ Выдавливание  \ Выберите объекты: рамкой охватите объекты, для которых строим чертеж \ Направление \ Определите начальную точку направления: 0,0 \ Определите

конечную точку направления: 0,0,0.001 – из треугольника получен солид, из отрезков полосы поверхностей, исходные объекты геометрии (область и отрезки) удалены;

- ◆ 3D-инструменты \ Прямое моделирование \ Толщина  \ Выберите поверхность для придания толщины: охватите рамкой все объекты \ Укажите толщину: 0.001 – отрезки стали солидами, в итоге все объекты стали солидами;
- ◆ 3D-инструменты \ Булевы операции \ Объединение  \ охватите рамкой все объекты – все объекты стали единым солидом;
- ◆ для проверки укажите объект – вся подготовленная модель должна выделяться как единый объект с подтверждением (задержите курсор на объекте), что это 3D-сольд.

Создаем 2D-виды в пространстве Модели:

- ◆ 3D-инструменты \ 2D-виды \ 2D Вид  \ Выберите объекты: укажите подготовленный единый солид-объект \ Укажите, куда будут вставляться виды: Модель \ переместите курсор на свободное место и укажите место вставки горизонтальной проекции – установлена горизонтальная проекция \ переместите курсор вверх и укажите положение фронтальной проекции – построены горизонтальная и фронтальная проекции;
- ◆ 3D-инструменты \ 2D-виды \ 2D-проекция (2D Проекционный вид)  \ укажите фронтальную проекцию и переместите курсор вправо \ укажите точку вставки проекции – построена профильная проекция;
- ◆ охватите рамкой все проекции, в панели «Свойства» найдите строку «Показывать скрытые линии» и укажите «Да» – если в модели присутствуют скрытые линии, то на всех проекциях они появились и показаны штриховой линией;
- ◆ Построение \ Разбивка  \ укажите все проекции – при этом разрывается ассоциативная связь между проекциями и 3D-моделью, и проекции разбиваются на отдельные линии;
- ◆ отредактируйте длину штриха скрытых линий. Для этого охватите рамкой все проекции, в панели «Свойства» найдите строку «Масштаб типа линий» и задайте новое значение. В нашем примере задайте 0.3...0.5.

Удаление повторяющихся линий чертежа

Построенные проекции содержат группы отрезков, расположенных на расстоянии друг от друга, не превышающем величины выдавливания и толщины. Их наличие объясняется заменой отрезков модели на солиды. Рекомендуется командой «Удаление повторяющихся объектов» очистить изображения от повторяющихся отрезков. При выполнении команды необходимо задать допуск, в пределах которого объекты рассматриваются как повторяющиеся. В нашем примере допуск должен превышать толщину полосок и толщину солидов при выдавливании. Зададим допуск равным 0.01. Остальные настройки команды оставим «по умолчанию»:

- ◆ Главная \ Редактирование ▼ \ Удаление повторяющихся объектов  \ выберите проверяемые объект рамкой \ в открывшейся панели задайте допуск 0.01 \ ОК.

Эффективность команды можно определить по снижению количества объектов. Для этого введите команду «Выбор» и охватите рамкой все проекции – количество выбранных объектов отражено в командной строке. Это количество также показано в панели «Свойства», в верхней строке. В нашем примере до удаления повторяющихся объектов три проекции содержали 125 объектов, после применения команды осталось 46.

В завершение выполните оформление проекций в соответствии с требованиями чертежа: постройте линии проекционной связи, придайте толщину и тип линий, проставьте обозначения точек чертежа и т. д. (см. рис. 5.3в).

- ◆ Сохраните файл с именем «Автоматический чертеж Орто проецирования .dwg».

6.2.3. Модель и чертеж к рис. 5.4 «3D-модель пересечения отрезка с плоскостью»

Координаты точек в МСК: $A(22, 6, 17)$; $B(46, 62, 62)$; $C(80, 30, 66)$; $D(70, 33, 41)$; $m((10, 19, 70) (84, 50, 24))$.

- ◆ Создайте новый файл на основе шаблона.
- ◆ Отрезками или 3D-полилинией постройте треугольник ABC . Преобразуйте его в область.
- ◆ Постройте отрезок m .
- ◆ Установите ПСК по точкам A, B, C и через панель «Свойства» постройте проекцию отрезка m на плоскость треугольника – отрезок m' .
- ◆ Поставьте маркер в точку $M = m \cap m'$.
- ◆ Верните МСК и постройте проекцию треугольника и отрезка на плоскость Π_1 .
- ◆ Постройте чертеж модели (см. рис. 5.4з, д) согласно алгоритму, приведенному выше (см. раздел 6.2.1), и примеру – см. раздел 6.2.2.

При построении чертежа (см. рис. 5.4) следует учесть, что отрезки m, m' и два отрезка, соединяющие их конечные точки, образуют два замкнутых контура. Поэтому (см. раздел 6.2.1, п. 2в) команду «Выдавливание» к этим отрезкам необходимо применить раздельно. Например, первоначально преобразовать отрезок m , затем остальные три.

- ◆ После построения 2D-видов включите отображение скрытых линий. Настройте длину штриха (см. раздел 6.2.2).
- ◆ Сохраните файл с именем «Пересечение отрезка с плоскостью .dwg».

6.3. Модели косоугольного проецирования

Косоугольное проецирование объекта на плоскость выполняется под углом к плоскости, отличающимся от прямого угла. Для этого направление проеци-

рования задают прямой линией. Для проецирования точки достаточно найти пересечение этой прямой с плоскостью. При проецировании контуров эта прямая выполняет роль направляющей в команде «Выдавливание».

6.3.1. Модель к рис. 5.5а «Построение точки в плоскости по фронтальной проекции этой точки»

Координаты точек в МСК: $A(50, 63, 11)$; $B(71, -4.5, 51)$; $C(-4, -48, 99)$, $M_2(36, 70, 56)$.

- ◆ Создайте новый файл на основе шаблона.
- ◆ Отрезками или 3D-полилинией постройте треугольник ABC . Преобразуйте его в область.
- ◆ Постройте точку M_2 – построена точка как маркер в плоскости Π_2 .

Постройте отрезок n из точки M_2 перпендикулярно Π_2 :

- ◆ Отрезок \ с привязкой «Узел» укажите маркер точки \ @ 0, -135, 0;
- ◆ установите ПСК по точкам A, B, C и через панель «Свойства» постройте проекцию отрезка n на плоскость треугольника – построен отрезок n' ;
- ◆ поставьте маркер на пересечение отрезков n и n' – это искомая точка M ;
- ◆ верните МСК и постройте проекцию треугольника и отрезка n на плоскость Π_1 ;
- ◆ сохраните файл с именем «Косоугольное проецирование точки .dwg».

6.3.2. Модель к рис. 5.5б «Построение треугольника в заданной плоскости по его горизонтальной проекции»

Координаты точек в МСК: $A_1(26, 49)$; $B_1(50, 7)$; $C_1(74, 49)$; $D(0, 0)$.

- ◆ Создайте новый файл на основе шаблона – см. п.п. 1 и 2, раздел 2.22.
- ◆ Постройте треугольник $\Delta' (A_1B_1C_1)$ и преобразуйте его в область.
- ◆ Командой «Выдавливание»  постройте вертикальную призму с основанием Δ' высотой 100. В панели свойств придайте призме прозрачность 50.
- ◆ Постройте треугольник (DEF) , в котором точки E, F задайте с объектной привязкой «Середина» к ребрам координатных плоскостей.
- ◆ 3D-инструменты \ Режимы моделирования \ Прямое \ Прямое моделирование \ Сечение  \ 3 точки \ укажите точки D, E, F – построен искомый треугольник ABC .
- ◆ Придайте модели наглядность.
- ◆ Сохраните файл с построенными моделями с именем «Косоугольное проецирование треугольника .dwg».

6.3.3. Тень от призмы

Рассмотрим алгоритм построения 3D-модели и чертежа падающей тени от призмы на плоскости Π_1 и Π_2 (см. раздел 5.4.3 и рис. 5.6).

- ◆ Создайте новый файл на основе шаблона.

Строим призму как параллелепипед в плоскости Π_1 (см. рис. 5.6a). Длина призмы 40 (вдоль оси X), толщина 20, высота 60. Призма должна отстоять от плоскости Π_2 на 12 мм. Учитываем, что расстояние от начала координат МСК до Π_2 в шаблоне равно 70:

- ◆ Главная \ 3D-инструменты \ Режимы моделирования \ Прямое \ Прямое моделирование \ Параллелепипед  \ Первый угол: 0,38 \ Другой угол: @40,20 \ Высота: 60;

- ◆ в панели «Свойства» проверьте размеры и положение призмы.

Строим отрезок светового луча. Отрезок должен быть направлен по диагонали условного куба, грани которого параллельны координатным плоскостям Π_1 , Π_2 . Отрезок также должен пройти через правую угловую точку A (рис. 5.6a). Длину отрезка в сторону солнца зададим по диагонали куба со стороной 40, в обратную сторону – как диагональ куба со стороной 70. Эти значения заданы условно с учетом последующих построений. Первоначально построим отрезок, проходящий через начало координат МСК, затем переместим его в точку A :

- ◆ Отрезок  \ Первая точка: -40,-40,40 \ Укажите следующую точку: 70,70,-70;

- ◆ Перемещение  \ укажите отрезок \ Базовая точка: 0,0 \ укажите вторую точку: с привязкой «Конточка» укажите угловую точку A призмы – отрезок установлен в рабочее положение (см. рис. 5.6a).

Командой «Список» проверьте параметры отрезка:

- ◆ Список \ укажите отрезок \ $F2$ – в текстовом экране прочтите параметры отрезка;
- ◆ для возврата в графический режим повторно нажмите $F2$.

Должны быть следующие значения параметров отрезка: угол в плоскости XY : 45.0 – это угол между проекцией отрезка на Π_1 с осью X ; угол от плоскости XY : 35.26 – это угол между отрезком и его проекцией на плоскость XY , т. е. угол между диагональю куба и плоскостью Π_1 ; 3D-длина: 190.5 – истинная длина отрезка в нашем примере.

Командой «2D Вид» строим проекцию призмы на плоскость, перпендикулярную световому лучу (рис. 5.6б). Для этого установим ПСК в верхнюю конечную точку луча, направив ось Z вдоль луча «в сторону солнца»:

- ◆ Вид \ Координаты \ Направление оси Z  \ Укажите начальную точку: с привязкой «Конточка» укажите нижнюю точку отрезка луча \ Точка на положительном луче оси Z : с привязкой укажите верхнюю точку отрезка;
- ◆ Вид \ Координаты \ ПСК, Начало  \ с привязкой «Конточка» укажите верхнюю точку отрезка луча.

Система координат установлена. Строим проекцию призмы на плоскость XY этой системы:

- ◆ 3D-инструменты \ 2D-виды \ 2D Вид  \ укажите призму \ Модель – появился контур проекции \ 0,0 – в плоскости XY ПСК построена проекция призмы.

Необходимо совместить угловую точку проекции, соответствующую точке A призмы, с точкой $0,0$ системы ПСК (см. рис. 5.6в):

- ◆ Перемещение  \ укажите проекцию \ с привязкой «Конечная» укажите угол проекции, являющийся проекцией точки $A \setminus 0,0$.

Проверьте правильность размещения проекции. Для этого командой «План» установите вид на плоскость ПСК:

- ◆ План \ Текущая – должно быть видно совмещение проекции с изображением призмы.

Если совмещение не выполнено, то повторите перемещение проекции.

Формируем модель светового потока, образующего падающую тень. Для этого нужно создать контур проекции (см. рис. 5.6б) и выдавить его на длину, при которой образующийся 3D-сольд полностью пересечет плоскости Π_1 и Π_2 (см. рис. 5.6в). Строим контур проекции как замкнутую полилинию:

- ◆ изолируйте проекцию, скрыв остальные объекты;
- ◆ установите визуальный стиль «2D Каркас», проверьте, что включена объектная привязка «Конточка», и задайте красный цвет для линии;
- ◆ Главная \ Черчение \ Полилиния  \ укажите какую-либо точку наружного контура проекции \ Последовательно указывайте точки наружного контура в выбранном направлении обхода контура... \ Замкнуть.

Построен контур проекции (см. рис. 5.6б). Саму проекцию, созданную как «2D Вид», можно удалить.

- ◆ Отмените изоляцию объектов и восстановите их наглядное изображение.

Выдавливает контур на длину отрезка луча:

- ◆ установите визуальный стиль «Концептуальный»;
- ◆ 3D-инструменты \ Режимы моделирования \ Прямое \ Прямое моделирование \ Выдавливание  \ Выберите объект для выдавливания: укажите контур \ перемещая курсор, наблюдайте за длиной образующегося 3D-сольда \ укажите нижнюю конечную точку отрезка светового луча.

Получен объект, показывающий световой поток, приводящий к образованию тени. Для повышения наглядности придадим этому объекту прозрачность и увидим внутри него призму (см. рис. 5.6в):

- ◆ укажите объект светового потока \ клик ПКМ \ в панели «Свойства» найдите строку «Прозрачность» \ задайте прозрачность 50...70.

Если установлен наглядный визуальный стиль, например «Концептуальный», то на плоскостях Π_1 , Π_2 увидим области падающей тени как пересечение потока с плоскостями. Создаем сечения объекта светового потока плоскостями Π_1 и Π_2 . Для этого дважды применим команду «Разрез». Затем объект разобьем на грани и оставим только грани сечений, образовавшиеся в результате применения разрезов:

- ◆ 3D-инструменты \ ... \ Разрез  \ Выберите объекты: укажите объект светового потока \ опция «плоский Объект» \ Выберите плоский объект для определения плоскости среза: укажите плоскость Π_1 \ Выберите сторону,

которую необходимо оставить, – с объектной привязкой «Конточка» укажите любую верхнюю точку призмы – срезана часть объекта, расположенная ниже плоскости Π_1 ;

- ◆ повторите команду  и срежьте часть объекта, расположенную за плоскостью Π_2 ;
- ◆ к оставшемуся объекту светового потока примените команду «Разбивка» . Объект распадется на грани;
- ◆ удалите боковые грани объекта и грани его оснований.

Остались грани объекта, являющиеся моделями искомым падающих теней. Это объекты типа «Область». 3D-модель тени построена (см. рис. 5.6г).

Построим в автоматическом режиме чертеж призмы с контурами теней (рис. 5.6д). Для этого применим команду «2D Вид»:

- ◆ установите МСК; скройте (изолируйте) координатные плоскости Π_1 , Π_2 , оставив призму и построенные области теней; установите вид сверху;
- ◆ 2D-Вид \ Выберите объекты: рамкой выберите призму и две области теней \ опция «Модель» \ перемещайте курсор – за ним следует изображение 2D-вида сверху \ курсором укажите точку вставки вида сверху \ переместите курсор вверх – за ним следует изображение 2D-вида спереди \ укажите точку вставки вида спереди;
- ◆ совместите (сомкните) проекции в вертикальном направлении.

На виде спереди включите отображение скрытых линий:

- ◆ укажите 2D-вид спереди \ в окне «Свойства» по строке «Показывать скрытые линии» укажите «Да»;
- ◆ примените команду «Разбивка» к видам – изображения распались на отрезки;
- ◆ выполните оформление чертежа: придайте линиям толщину, выполните штриховку контуров теней, обозначьте проекции точек (см. рис. 5.6д);
- ◆ сохраните файл с именем «Тень призмы .dwg».

6.4. Модель и алгоритм НГ построения точки пересечения прямой с плоскостью

В дополнение к лекции (см. раздел 5.5, рис. 5.7) рассмотрим подробнее алгоритм первой позиционной задачи. Построение начинается с задания вспомогательной секущей плоскости. Эта плоскость должна быть перпендикулярной одной из трех плоскостей проекций $\Pi_1 \dots \Pi_3$. То есть возможны три варианта решения. Выбор варианта влияет на выполняемые построения, но не влияет на результат построения, ибо точка пересечения прямой с плоскостью единственно возможная. Приведем решение для двух вариантов: для горизонтально проецирующей плоскости и для фронтально проецирующей плоскости.

6.4.1. Решение для горизонтально проецирующей плоскости. Метод конкурирующих точек

В разделе 5.5 показано построение, в котором секущая плоскость α задана горизонтально проецирующей.

3D-модель

Координаты точек в МСК (см. рис. 5.7а): $A(21.5, 7.5, 34)$, $B(46, 63.5, 79)$, $C(70, 35.5, 57.5)$, $m((11.5, 20, 85.5)(86, 53.5, 39))$.

- ◆ Создайте новый файл на основе шаблона.
- ◆ Постройте треугольник (ABC) и преобразуйте его в область.
- ◆ Постройте отрезок m .
- ◆ Постройте проекцию m_1 отрезка m на плоскость Π_1 .
- ◆ Установите ПСК в плоскость треугольника.
- ◆ Постройте отрезок n как проекцию отрезка m на плоскость треугольника.
- ◆ Установите ПСК по конечным точкам отрезка m_1 и одной из точек отрезка m (точки 6, 7, 8 см. рис. 5.7).

В ПСК постройте прямоугольник α как образ горизонтально проецирующей плоскости. Преобразуйте его в область:

- ◆ Главная \ Черчение \ Прямоугольник по 2 точкам  \ Первый угол: 8.5,36 \ Второй угол: 63,85;
- ◆ придайте модели наглядность: с привязкой «Пресечение» поставьте маркер в точку M , переместите плоскость Π_2 на 20 мм вдоль оси Y , постройте проекции модели на плоскости Π_1 и Π_2 (см. раздел 2.22, п. 5);
- ◆ сохраните файл с именем «Пересечение прямой с плоскостью алгоритм НГ-1.dwg».

Алгоритм решения в символической записи

Рассмотренный выше алгоритм построения 3D-модели применяется и в начертательной геометрии. В 3D он реализуется посредством пространственных построений, в 2D – через построения на проекционном чертеже. Приведем символическую запись этого алгоритма применительно к решению на проекционном чертеже, т. е. как алгоритм НГ. Запись алгоритма рекомендуется выполнять в курсе НГ при решении задач. К алгоритму добавим комментарии.

Дано: $\Delta(ABC)$, m – задана плоскость Δ и отрезок m ; в нашем примере это проекции треугольника ABC и отрезка m (рис. 5.7б).

Найти: $M = m \cap \Delta$ – ? – найти точку M пересечения отрезка m и плоскости Δ (рис. 5.7в).

1. $\alpha \supset m$; $\alpha \perp \Pi_1$ – зададим плоскость α , включающую в себя отрезок m и перпендикулярную плоскости Π_1 .
2. $n = \alpha \cap \Delta$ – строим проекции линии n пересечения плоскостей α и Δ .
3. $M = n \cap m$ – находим точку M как точку пересечения прямых n и m .

Решение на проекционном чертеже

Построения на чертеже (рис. 5.7в) являются реализацией приведенного выше алгоритма. Выполняются они в следующей последовательности.

По п. 1 алгоритма: на Π_1 обозначим коротким отрезком проекцию секущей плоскости α_1 .

По п. 2: делаем запись $m_1 = n_1$, т. е. проекция линии пересечения плоскостей совпадает с проекцией отрезка m ; обозначим точки $1_1, 2_1$; по проекционной связи найдем и обозначим точки $1_2, 2_2$ и по ним проводим отрезок n_2 .

По п. 3: на пересечении отрезков $m_2 \cap n_2$ находим и обозначаем точку M_2 ; по проекционной связи находим и обозначаем точку M_1 .

В итоге найдены две проекции точки M – задача решена.

В начертательной геометрии принято считать объекты непрозрачными, т. е. в рассматриваемом примере треугольник ABC непрозрачный. При пересечении с отрезком m он его частично закрывает. Необходимо на проекциях отразить видимость отрезка, показав невидимые участки отрезка m штриховой линией. Для определения видимости применяют метод конкурирующих точек определения взаимного положения скрещивающихся прямых (см. раздел 3.4.3). Применим этот метод.

В рассматриваемой задаче скрещивающимися прямыми являются отрезок m и ребра треугольника ABC . Определяем видимость относительно горизонтальной плоскости Π_1 , т. е. при взгляде на модель сверху. На горизонтальной проекции (рис. 5.7в) выбираем две горизонтально конкурирующие точки $1_1 = 3_1$ отрезков m и AB . По проекционной связи находим фронтальные проекции этих точек $1_2, 3_2$. По ним видно, что к наблюдателю $E1$ точка 3 расположена ближе, чем точка 1, следовательно, отрезок m расположен над отрезком AB и в этом месте на виде сверху его закрывает, т. е. является видимым после пересечения с плоскостью ABC . То есть на участке (M_1-2_1) он становится невидимым. Невидимый участок показываем штриховой линией.

На фронтальной проекции выбираем две фронтально конкурирующие точки с проекциями $4_2 = 5_2$. По проекционной связи находим их горизонтальные проекции $4_1, 5_1$. К наблюдателю $E2$ ближе расположена точка 4, точка 5 – за ней. Следовательно, отрезок m на виде спереди закрывает ребро AB и в этом месте является видимым. После точки M_2 отрезок «уходит за плоскость треугольника», становится невидимым и показан штриховой линией.

Конкурирующие точки 1, 3 и 4, 5 показаны на 3D-модели (см. рис. 5.7а), которая наглядно показывает видимость отрезка m .

Рекомендуем построить чертеж (см. рис. 5.7в) в автоматическом режиме по алгоритму, приведенному в разделе 6.2, и сравнить результаты ручного и автоматического построения.

6.4.2. Решение для фронтально проецирующей плоскости

Рассмотрим второй вариант решения задачи о нахождении точки пересечения прямой с плоскостью, в котором вспомогательная секущая плоскость задана фронтально проецирующей плоскостью β .

3D-модель

На 3D-модели (рис. 6.1), по сравнению с предыдущим примером (см. рис. 5.7), треугольник ABC остался без изменений – его координаты приведены выше (см. раздел 6.4.1). Изменилось положение отрезка m , его новые координаты в МСК: $m((6.3, 42.7, 89)(86.5, 13, 39))$. Это повлекло за собой изменения в алгоритме построения 3D-модели:

- ◆ создайте новый файл на основе шаблона; постройте треугольник ABC , преобразуйте его в область; постройте отрезок m ;
- ◆ переместите плоскость Π_2 на 20 мм вдоль оси Y ;
- ◆ постройте проекцию m_2 отрезка m на плоскость Π_2 ;
- ◆ постройте проекцию n отрезка m на плоскость треугольника;
- ◆ установите ПСК по конечным точкам отрезка m_2 и одной из точек отрезка m – точки 6, 7, 8.

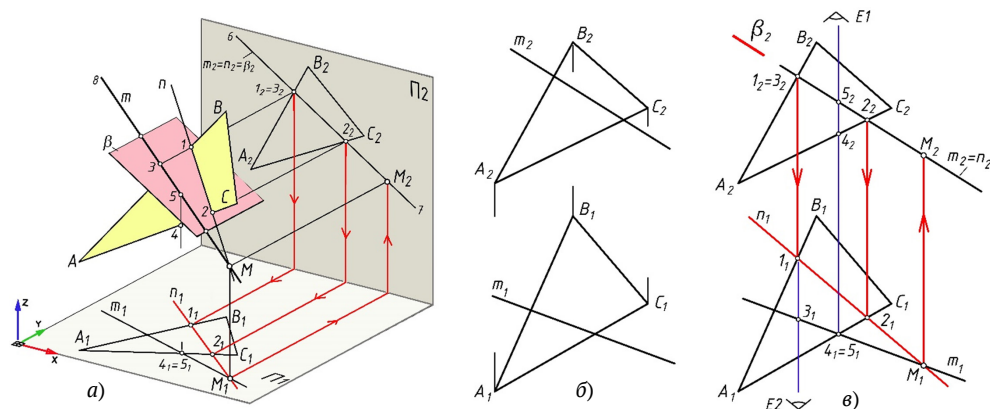


Рис. 6.1. Алгоритм НГ определения точки пересечения прямой и плоскости.

Вариант с фронтально проецирующей плоскостью:

a – 3D-модель; b – дано; v – чертеж

В ПСК постройте прямоугольник β как образ фронтально проецирующей плоскости. Преобразуйте его в область:

- ◆ Главная \ Черчение \ Прямоугольник по 2 точкам  \ Первый угол: 16,58 \ Второй угол: 61,100;
- ◆ удлините отрезки m и n до взаимного пересечения в искомой точке M ;
- ◆ придайте модели наглядность: с привязкой «Пресечение» поставьте маркер в точку M , постройте проекции 3D-модели на плоскости Π_1 и Π_2 (см. раздел 2.22, п. 5);
- ◆ сохраните файл с именем «Пересечение прямой с плоскостью алгоритм НГ-2.dwg».

Алгоритм решения на проекционном чертеже (рис. 6.1б, в)

Дано: $\Delta(ABC)$, m . $M = m \cap \Delta$ – ?

1. $\beta \supset m$; $\beta \perp \Pi_2$ – зададим плоскость β , включающую в себя отрезок m и перпендикулярную плоскости Π_2 .
2. $n = \beta \cap \Delta$ – строим проекции линии n пересечения плоскостей β и Δ .
3. $M = n \cap t$ – находим точку M как точку пересечения прямых n и t .

Последовательность построений чертежа (рис. 6.1б, в) следующая.

На Π_2 обозначим проекцию секущей плоскости β_2 ; найдем точки $1_2, 2_2$; по проекционной связи найдем точки $1_1, 2_1$ и по ним построим отрезок n_1 ; на пересечении отрезков n_1, t_1 найдем горизонтальную проекцию искомой точки M_1 ; по проекционной связи найдем фронтальную проекцию искомой точки M_2 .

Особенность рассмотренной задачи в том, что найденная точка M находится вне контура треугольника (ABC) (см. рис. 6.1в). Поэтому отрезок t пересекает плоскость Δ , но не пересекает треугольник.

Для определения видимости рассмотрены фронтально конкурирующие точки 1, 3 и горизонтально конкурирующие точки 4, 5. Поскольку точка 3 расположена ближе к наблюдателю $E2$, то отрезок t полностью виден на виде спереди. Поскольку точка 5 расположена выше точки 4 и ближе к наблюдателю $E1$, то отрезок t полностью виден и на виде сверху.

Конкурирующие точки 1, 3 и 4, 5 показаны на 3D-модели (см. рис. 6.1а), на которой наглядно отражена видимость отрезка t .

6.5. Главные прямые плоскости. 3D-модель и алгоритм НГ

Рассмотрим построение 3D-модели главных прямых, приведенной в разделе 5.6, а также соответствующий алгоритм ее построения в начертательной геометрии.

6.5.1. 3D-модели главных прямых

- ◆ Создайте новый файл на основе шаблона.
- ◆ Постройте треугольник ABC из отрезков, координаты вершин – см. рис. 5.8б.

Для построения горизонтали (см. рис. 5.8а):

- ◆ перенесите начало координат МСК в точку A ;
- ◆ создайте дубликат отрезка BC и применением панели «Свойства» или команды «Конвертирование в 2D» постройте его проекцию на плоскость XU – отрезок $B'C'$;
- ◆ Отрезок  \ с объектной привязкой «Конточка» укажите точку A \ с объектной привязкой «Пересечение» укажите точку D пересечения отрезка BC и его проекции – построена горизонталь h .

Для построения фронтали (см. рис. 5.8в):

- ◆ начало координат МСК перенесите  в точку B и выполните поворот ПСК вокруг оси X  на 90° – плоскость XU установлена во фронтальную плоскость уровня β ;

- ◆ постройте проекцию отрезка AC на плоскость XU – отрезок $A''C''$;
- ◆ постройте отрезок из точки B в точку E пересечения отрезка AC со своей проекцией – построена фронталь f .

Для построения профильной прямой (см. рис. 5.8г):

- ◆ начало координат МСК перенесите в точку C , выполните поворот ПСК вокруг оси X  на 90° , затем вокруг оси Y  на 90° – плоскость XU установлена в профильную плоскость уровня γ ;
- ◆ постройте проекцию отрезка AB на плоскость XU – отрезок $A'''B'''$;
- ◆ постройте отрезок из точки A в точку F пересечения отрезка AB со своей проекцией – построена профильная прямая p .

Наиболее эффективным является алгоритм построения главных линий как сечений поверхности (см. рис. 5.8д). Строим сектор поверхности в плоскости $\Delta(ABC)$:

- ◆ 3D-инструменты \ Режим моделирования \ Прямое \ Прямое моделирование \ Выдавливание  \ Выберите объект для выдавливания: укажите отрезок AC \ Траектория \ Выберите траекторию выдавливания: с привязкой «Ближайшая», укажите отрезок BC – построен сектор поверхности ϕ в виде параллелограмма;
- ◆ наведите курсор на сектор – рядом с курсором должно появиться сообщение «Поверхность (сдвиг)».

Строим главные прямые как сечения плоской поверхности ϕ :

- ◆ убедитесь, что установлена МСК, иначе: Вид \ Координаты \ МСК  – восстановлена МСК;
- ◆ 3D-инструменты \ Режим моделирования \ Прямое \ Прямое моделирование \ Сечение  \ Выберите объекты: укажите сектор плоскости ϕ \ Опция XU \ Точка на плоскости XU : с объектной привязкой укажите точку A – построен отрезок горизонтали h как сечение сектора;
- ◆ Сечение  \ укажите сектор плоскости \ Опция ZX \ Точка на плоскости ZX : с объектной привязкой укажите точку B – построен отрезок фронтали f ;
- ◆ Сечение  \ укажите сектор плоскости \ Опция YZ \ Точка на плоскости YZ : с объектной привязкой укажите точку C – построен отрезок профильной прямой p .

Линию ската (см. рис. 5.8е) построим как перпендикуляр q , опущенный на горизонталь h из наиболее высокой точки B треугольника:

- ◆ Отрезок \ укажите точку B \ с привязкой «Нормаль» укажите отрезок горизонтали;
- ◆ модели всех главных прямых отобразите на одном треугольнике как итоговый лекционный пример (см. рис. 5.8е);
- ◆ придайте итоговой 3D-модели наглядность;
- ◆ создайте файл «Главные прямые плоскости.dwg», в котором сохраните модель всех главных прямых (см. рис. 5.8е).

6.5.2. Алгоритм начертательной геометрии построения главных прямых

Построение главных прямых на проекционном чертеже (рис. 6.2) рассмотрим на примере треугольника, 3D-модель которого приведена на рис. 5.8а. Проекции треугольника построены по координатам (см. рис. 5.8б). Они также могут быть построены в автоматическом режиме по 3D-модели. Чертеж дополнен линией преломления построенной точки A . Эта линия упрощает построения на профильной проекции.

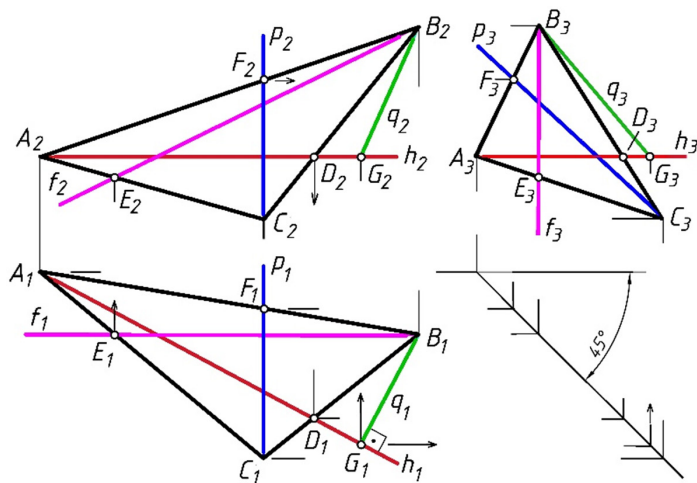


Рис. 6.2. Построение главных прямых плоскости. Чертеж

Построим горизонталь, проходящую через вершину A . Все горизонтали, проходящие через точку A , имеют своей фронтальной проекцией горизонтальную прямую h_2 и профильную проекцию h_3 . Искомая горизонталь также имеет эти проекции. Строим эти проекции. Вторую точку горизонтали определим как точку D_2 пересечения h_2 со стороной BC . По проекционной связи находим горизонтальную проекцию точки D_1 . По точкам A_1 и D_1 строим горизонтальную проекцию горизонтали h_1 . Горизонталь построена.

Для построения фронтали в плоскости треугольника (ABC) выбираем вершину B . Все фронтали, проходящие через точку B , имеют своей горизонтальной проекцией отрезок f_1 и профильную проекцию f_3 . Строим f_1 и f_3 . Находим точки E_1 и E_2 . По точкам B_2 , E_2 строим фронтальную проекцию фронтали f_2 . Фронталь построена.

Профильную прямую построим из вершины C треугольника. Горизонтальная p_1 и фронтальная p_2 проекции профильной прямой отображаются как вертикальные прямые. Строим эти проекции и обозначаем проекции точки F пересечения профильной прямой со стороной AB треугольника. Наглядное отображение профильной прямой выявляется на профильной проекции как отрезок p_3 .

Для построения проекций линии ската необходимо учесть, что линия ската плоскости перпендикулярна горизонтали этой плоскости. Следовательно, угол между горизонталью и линией ската в пространстве является прямым, причем одна сторона этого угла, горизонталь, параллельна плоскости Π_1 . Согласно теореме о проецировании прямого угла (см. раздел 5.9) проекции сторон этого угла на Π_1 образуют прямой угол. Поэтому на горизонтальной проекции опускаем перпендикуляр из точки B_1 на горизонталь h_1 – это горизонтальная проекция линии ската q_1 . Основание перпендикуляра – точка G_1 . По линиям связи находим точки G_2, G_3 . Строим фронтальную q_2 и профильную q_3 проекции линии ската.

Осталось оформить чертеж: отобразить типы и толщину линий, проставить буквенные обозначения проекций точек и линий; можно для наглядности придать линиям цвет.

6.6. Модели и 3D-алгоритмы пересечения плоскостей

Рассмотрим построение 3D-моделей и реализацию 3D-алгоритмов, приведенных в разделе 5.7, а также алгоритм начертательной геометрии построения линии пересечения.

6.6.1. Модели к рис. 5.9 «3D-алгоритмы построения линии пересечения двух плоскостей»

Построим модели двух плоскостей, заданных отрезками параллельных прямых (см. рис. 5.9а). Координаты отрезков приведены на рис. 5.9е.

- ◆ Создайте новый файл на основе шаблона – см. п.п. 1 и 2, раздел 2.22.
- ◆ Постройте  отрезок a по точкам 1, 2.
- ◆ Скопируйте  отрезок a из точки 1 в точку 3 – построен отрезок b .
- ◆ Постройте отрезок c по точкам 4, 5.
- ◆ Скопируйте отрезок c из точки 4 в точку 6 – построен отрезок d .

Модель исходных данных построена. Переходим к моделям алгоритмов пересечения плоскостей.

Модель к рис. 5.9б. Алгоритм 1 (см. раздел 5.7.1)

- ◆ Вид \ Координаты \ ПСК «3 точки»  \ с объектной привязкой «Конточка» укажите точки 4, 5, 6 – установлена ПСК в плоскость β .

Построим проекции отрезков a, b на плоскость XY ПСК:

- ◆ Копирование  \ укажите отрезки a, b \ Перемещение \ 0,0,0 – построены копии отрезков;
- ◆ укажите копии отрезков \ в окне «Свойства» задайте значения Z -координат концов отрезков равными 0 – построены ортогональные проекции отрезков a, b – отрезки a', b' .

Строим искомый отрезок m линии пересечения плоскостей:

- ◆ Отрезок  \ с привязкой «Пересечение» укажите точки пересечения отрезков со своими проекциями – построен отрезок m искомой линии пересечения плоскостей.

Модель к рис. 5.9в, алгоритм 2 (см. раздел 5.7.2)

Создадим поверхность γ выдавливанием отрезка d по траектории f (см. рис. 5.9в):

- ◆ отрезок по точкам 4, 6 – построен отрезок f \ укажите отрезок f и удлините его за ручку со стороны точки 4 – построен отрезок траектории f ;
- ◆ 3D-инструменты \ Прямое моделирование \ Выдавливание  \ укажите отрезок d \ опция «Траектория» \ укажите отрезок f – построен сектор поверхности γ .

Построим сечение поверхности γ плоскостью, заданной отрезками a, b :

- ◆ 3D-инструменты \ Прямое моделирование \ Сечение  \ Выберите объекты: укажите сектор плоскости γ \ опция «3 точки» \ с объектной привязкой укажите точки 1, 2, 3 – построен искомый отрезок m линии пересечения плоскостей.

Модель к рис. 5.9д «Определение двугранного угла»

Установим ПСК, направив Z-ось вдоль отрезка линии пересечения:

- ◆ Вид \ Координаты \ ПСК «Направление оси Z»  \ укажите конечные точки отрезка m линии пересечения – ось Z ПСК направлена вдоль отрезка линии пересечения;
- ◆ в командной строке введите: План \ Текущая – плоскости отображены как отрезки прямых, отрезок m отображен как точка.

Проставьте угловой размер между отрезками. Первоначально обведите угол двумерной полилинией.

- ◆ Главная \ Черчение \ Полилиния  \ укажите с привязкой «Конточка» одну из конечных точек угла, затем его вершину и другую конечную точку.
- ◆ Оформление \ Размеры \ Угловой  \ укажите стороны полилинии – представлен угловой размер.
- ◆ Придайте моделям наглядность.
- ◆ Создайте файл «Пересечение плоскостей .dwg», в котором сохраните модель исходных прямых $a...d$ (см. рис. 5.9а).

6.6.2. Модель к рис. 5.10 «Пересечение треугольников»

- ◆ Создайте файл на основе шаблона.

Строим контуры двух треугольников (см. рис. 5.10а) как замкнутые пространственные 3D-полилинии. Координаты вершин треугольников – см. рис. 5.10б:

- ◆ Построения \ Черчение \ 3D-полилиния  \ Введите координаты трех точек A, B, C \ Замкнуть – построен контур первого треугольника;
- ◆ постройте контур второго треугольника по точкам D, E, F .

Создаем солиды выдавливанием контуров:

- ◆ Выдавливание  \ укажите оба контура \ Укажите высоту выдавливания: 0.001 – построены два солида, имеющие контуры треугольников и толщину 0.001;
- ◆ в панели «Свойства» придайте солидам различный цвет.

Объединяем солиды и получаем линию пересечения:

- ◆ 3D-инструменты \ Булевы операции \ Объединение  \ укажите оба солида – в результате объединения образовалась линия пересечения.

Цвет граней можно редактировать и после объединения солидов:

- ◆ 3D-инструменты \ Прямое моделирование \ Редактировать тело  \ Задайте параметр редактирования: Грань \ Цвет \ Выберите грань: укажите грани первого треугольника с двух сторон \ задайте цвет – граням присвоен цвет;
- ◆ той же командой можно редактировать цвет линий солидов, например линию пересечения можно выделить красным цветом;
- ◆ придайте модели наглядность;
- ◆ выполните чертеж (см. рис. 5.10б) в автоматическом режиме по алгоритму, приведенному в разделах 2.17 и 6.2. Рекомендуем удалить повторяющиеся линии чертежа (см. раздел 6.2.2).

Измерьте угол между плоскостями треугольников. Для модели, построенной по приведенным координатам (см. рис. 5.10в), величина двугранного угла равна 78.3° .

- ◆ Создайте файл «Пересечение треугольников .dwg», в котором сохраните модель контуров треугольников (см. рис. 5.10а).

6.6.3. Построение линии пересечения плоскостей методами начертательной геометрии

Задача о построении линии пересечения плоскостей в курсе начертательной геометрии называется «Вторая позиционная задача». Рассмотрим алгоритм и пример ее решения на чертеже.

3D-модель алгоритма НГ

Алгоритм рассмотрим на примере модели двух плоскостей α ($a \parallel b$) и β ($c \parallel d$), каждая из которых задана двумя параллельными прямыми (рис. 6.3а). Требуется построить отрезок линии их пересечения.

Представим секущую плоскость Σ . Найдем отрезки прямых k и n пересечения Σ с заданными плоскостями α и β . Поскольку отрезки расположены в одной плоскости, то они пересекаются в точке M , которая является общей точкой плоскостей α и β , следовательно, одной из точек линии пересечения этих плоскостей.

Введем вторую секущую плоскость Σ' и найдем в ней точку N – это вторая точка линии пересечения плоскостей. По точкам M, N проводим искомую линию пересечения.

Поскольку две плоскости пересекаются по единственной прямой, то независимо от положения секущих плоскостей Σ и Σ' будет найдена эта прямая. Различными могут быть лишь отрезки этой прямой. Поэтому секущие плоскости задают из условия наглядности и более простого решения. В рассматриваемом примере обе плоскости заданы параллельными Π_1 , т. е. горизонтальными уровнями.

Построение 3D-модели

Возьмем за основу модель плоскостей, рассмотренную в разделе 6.6.

- ◆ Создайте копию файла «Пересечение плоскостей .dwg» (см. раздел 6.6.1); оставьте в файле отрезки прямых a, b, c, d и плоскость Π_1 . Остальные объекты можно удалить.

Построим две секущие плоскости Σ и Σ' (см. рис. 6.3а):

- ◆ создайте копию плоскости Π_1 с перемещением ее из точки 0,0 в точку (8, 10.5, 36.5), – это плоскость Σ ;
- ◆ создайте вторую копию плоскости Π_1 , задав перемещение из точки 0,0 в точку (–8, –1.7, 24) – это плоскость Σ' .

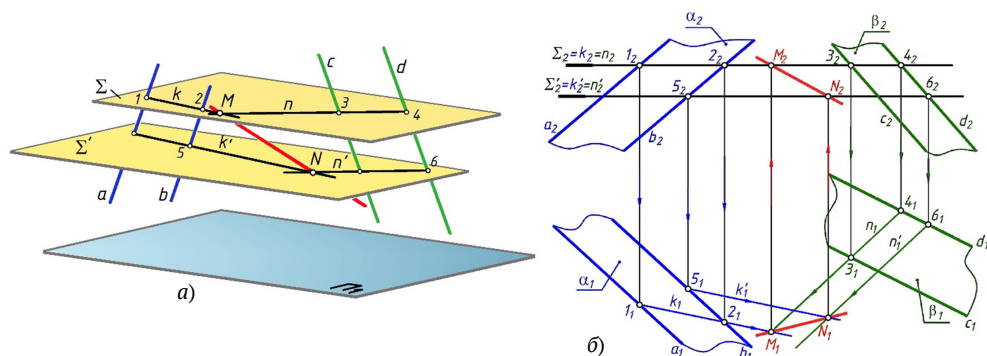


Рис. 6.3. Пересечение плоскостей. Алгоритм начертательной геометрии.
Построение чертежа: а – 3D-модель; б – чертеж

Построим отрезки линий пересечения заданных плоскостей α ($a \parallel b$) и β ($c \parallel d$) с секущими плоскостями Σ и Σ' :

- ◆ каждый из отрезков a, b, c, d удлините в обе стороны, как показано на рис. 6.3а (можно вытягивать за ручки);
- ◆ примените алгоритм 2 построения линий пересечения (см. раздел 5.7.2) и постройте четыре отрезка линий пересечения плоскостей $k = \Sigma \cap \alpha, k' = \Sigma' \cap \alpha, n = \Sigma \cap \beta, n' = \Sigma' \cap \beta$;
- ◆ удлините отрезки k, n до взаимного пересечения в точке M и отрезки k', n' до пересечения в точке N ;

- ◆ постройте отрезок MN – это искомый отрезок линии пересечения плоскостей α и β ;
- ◆ придайте модели наглядность и сохраните в файле «Пересечение плоскостей. Алгоритм НГ .dwg».

Алгоритм решения на чертеже

На проекционном чертеже (рис. 6.3б) секущие плоскости задают перпендикулярными плоскостям проекций. Применяют сокращенную символьную запись алгоритма решения задачи.

Дано: $\alpha (a \parallel b)$, $\beta (c \parallel d)$.

$(M, N) = \alpha \cap \beta - ?$

Решение.

1. $\Sigma \parallel \Pi_1$; $k(1, 2) = \Sigma \cap \alpha$; $n = \Sigma \cap \beta$; $M = k \cap n$.
2. $\Sigma' \parallel \Pi_1$; $k'(1, 2) = \Sigma' \cap \alpha$; $n' = \Sigma' \cap \beta$; $N = k' \cap n'$.
3. (M, N) – отрезок искомой линии пересечения плоскостей.

Выполняем построения на чертеже согласно алгоритму.

1. Зададим секущую плоскость Σ как горизонтальную плоскость уровня. Для этого построим отрезок Σ_2 фронтальной проекции секущей плоскости Σ .
2. Найдем линию k пересечения плоскостей Σ и α . Фронтальная проекция этой линии совпадает с проекцией Σ_2 . По точкам 1_2 и 2_2 , по проекционной связи построим горизонтальные проекции этих точек 1_1 , 2_1 и проводим отрезок k_1 .
3. Найдем линию n пересечения плоскостей Σ и β . Фронтальная проекция этой линии также совпадает с проекцией Σ_2 . По точкам 3_2 , 4_2 построим отрезки n_2 и по проекционной связи построим отрезок n_1 .
4. На пересечении отрезков k_1 , n_1 поставим точку M_1 . По проекционной связи найдем точку M_2 . Она расположена в плоскости Σ и принадлежит ее фронтальной проекции Σ_2 . Найдены проекции первой точки искомой линии пересечения.
5. Введем вторую секущую плоскость Σ' . Для упрощения зададим ее параллельно первой секущей плоскости Σ . Это позволит проводить линии сечения плоскости Σ' параллельно ранее построенным линиям плоскости Σ . Построим проекцию Σ'_2 . Строим ее параллельно Σ_2 . Находим точки 5_2 , 6_2 . По проекционной связи точки строим 5_1 , 6_1 .
6. Поскольку плоскости Σ и Σ' взаимно параллельны, то линии их пересечения с плоскостями α , β также взаимно параллельны. Поэтому через точку 5_1 строим отрезок $k'_1 \parallel k_1$, через точку 6_1 строим отрезок $n'_1 \parallel n_1$.
7. На пересечении отрезков k'_1 , n'_1 обозначим проекцию точки N_1 . По проекционной связи построим точку N_2 . Построена вторая точка искомой линии пересечения плоскостей α , β .
8. В завершение проводим отрезки M_1N_1 и M_2N_2 – это проекции искомой линии пересечения плоскостей α , β .

9. Осталось поставить обозначение проекций точек и прямых, провести линии проекционной связи, придать линиям толщину и цвет.

6.7. Построение плоского пятиугольника

Рассмотрим известную задачу из курса начертательной геометрии, но решим ее методами 3D-моделирования в Платформе nanoCAD.

Построить плоский пятиугольник, три вершины которого A, B, C заданы в пространстве своими горизонтальными и фронтальными проекциями, для двух других вершин D, E заданы только фронтальные проекции (рис. 6.4а).

Анализ условий задачи.

1. Плоскость пятиугольника Δ задана его тремя вершинами – точками A, B, C , поскольку для этих точек приведено по две проекции.
2. Для оставшихся двух вершин D, E заданы только фронтальные проекции D_2, E_2 .
3. Требуется построить точки D, E из условия, что они имеют фронтальные проекции D_2, E_2 и расположены в плоскости $\Delta (ABC)$.

6.7.1. Построение 3D-модели

- ◆ Создайте файл на основе шаблона.
- ◆ По координатам точек (рис. 6.4б, в) постройте отрезки AB, BC . Постройте отрезок D_2E_2 , для которого глубина точек задана так, чтобы отрезок был расположен в плоскости Π_2 .

На рис. 6.4 показано два алгоритма решения задачи. Первый алгоритм рассмотрен в разделе 5.4.1 и заключается в косоугольном проецировании точки

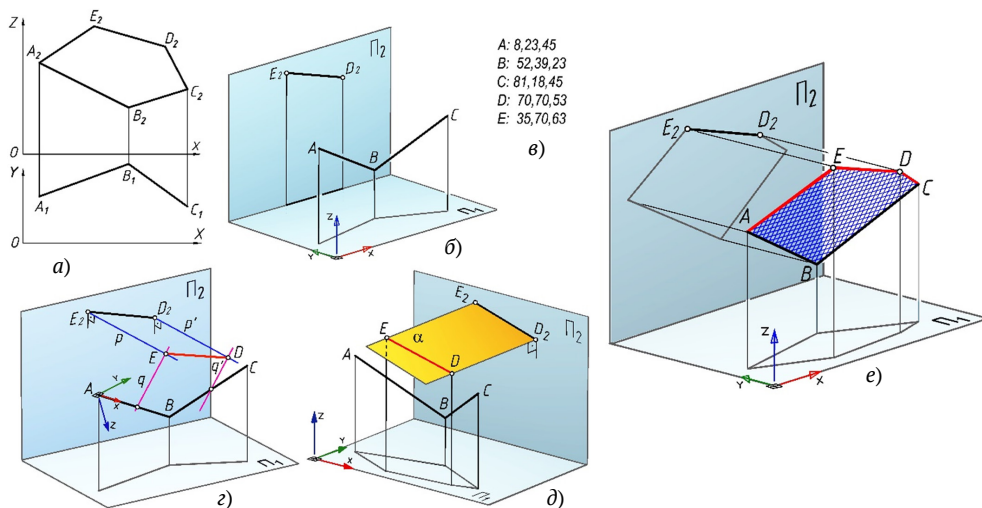


Рис. 6.4. Построение плоского пятиугольника:

а – исходный чертеж; б – 3D-модель исходных данных; в – координаты точек в МСК;
г – алгоритм 1; д – алгоритм 2; е – построенный пятиугольник

на плоскость. Для этого (рис. 6.42) из точек D_2, E_2 строим отрезки перпендикуляров p и p' к плоскости Π_2 . Устанавливаем ПСК в плоскость $\Delta(ABC)$ и строим на эту плоскость ортогональные проекции отрезков p и p' – это отрезки q и q' . Искомые точки D, E находим на пересечении отрезков p и p' со своими проекциями q и q' .

По второму алгоритму, рассмотренному в разделе 5.7.2, выдавливанием отрезка D_2E_2 перпендикулярно Π_2 строим поверхность α (рис. 6.4d). Искомый отрезок DE получим как сечение поверхности α плоскостью, задаваемой точками A, B, C .

Строим отрезки AE и DE и замыкаем контур пятиугольника.

6.7.2. Наглядность 3D-модели и ее проверка

Для придания 3D-модели наглядности командой «Конвертирование в 2D» построим проекции пятиугольника на координатные плоскости Π_1 и Π_2 .

Рекомендуем выполнить штриховку контура пятиугольника. Для этого, указав три точки контура, установите ПСК в плоскость пятиугольника и примените команду «Штриховка», подобрав красивый тип штриховки и ее параметры.

Для проверки правильности построения модели необходимо убедиться, что отрезок DE принадлежит плоскости $\Delta(ABC)$. Для этого установите ПСК опцией «3 точки» в плоскость Δ и командой «Список» или в панели «Свойства» определите Z -координаты концов отрезка. При правильном построении модели эти координаты должны быть равны нулю.

6.7.3. Алгоритм построения пятиугольника методами начертательной геометрии

Алгоритм реализует условия принадлежности точки и прямой линии плоскости (см. раздел 3.5.3). Требуется для плоского пятиугольника $ABCDE$ (см. рис. 6.4a) определить горизонтальные проекции вершин D, E , для которых заданы только фронтальные проекции.

Рассмотрим построение точки D (рис. 6.5a):

- ◆ постройте проекции диагонали AC – отрезки A_2C_2 и A_1C_1 ;
- ◆ постройте фронтальную проекцию диагонали BD – отрезок B_2D_2 ;
- ◆ из точки 1_2 проведите вертикальную линию связи. На пересечении с A_1C_1 обозначьте точку 1_1 ;
- ◆ постройте диагональ B_11_1 и продлите ее;
- ◆ из точки D_2 проведите вертикальную линию связи. На пересечении с диагональю B_11_1 найдите искомую горизонтальную проекцию вершины D – точку D_1 .

Построение точки E_2 (рис. 6.5б) выполняется тем же алгоритмом, что и для точки D . В завершение задачи необходимо достроить контур горизонтальной проекции отрезками C_1D_1, D_1E_1, E_1A_1 и оформить чертеж.

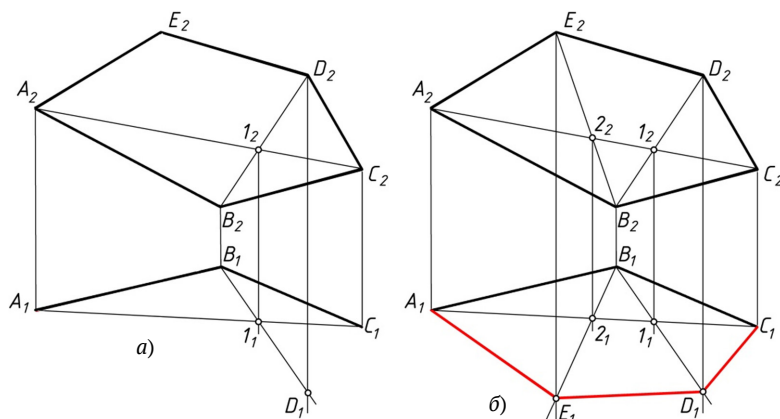


Рис. 6.5. Алгоритм НГ построения плоского пятиугольника:
а – построение точки D; б – чертеж

6.8. Модели и алгоритмы построения перпендикулярных объектов

Рассмотрим построение моделей и чертежей взаимно перпендикулярных объектов, приведенных в разделе 5.8.

6.8.1. Перпендикуляр из точки к прямой линии

Точка $A(0, 0, 0)$; b – отрезок прямой общего положения, его конечные точки $((0, 70, 70)(100, 0, 0))$. Координаты в МСК.

- ◆ Создайте файл на основе шаблона.
- ◆ Поставьте маркер в точку A и постройте отрезок b .
- ◆ ОТРЕЗОК \ Первая точка: с привязкой «Узел» укажите маркер точки A \ Следующая точка: $Shift + ПКМ$ \ в контекстном меню укажите привязку «Нормаль» \ наведите курсор на отрезок b в его произвольной точке – система нашла основание перпендикуляра, подождите 1...3 с, найденная точка отмечена надписью «Нормаль» \ клик ЛКМ – подтвердите найденную точку – искомый отрезок перпендикуляра построен.

Для проверки правильности построений следует установить ПСК в плоскость, образованную заданным и построенным отрезками, и проставить угловой размер между отрезками.

6.8.2. Построение ромба. Алгоритм 3D

По координатам (см. рис. 5.11б) постройте отрезки AB и AF как исходные данные 3D-модели:

- ◆ Отрезок \ первая точка: 59,31,32 \ следующая точка: 24,40,38 \ следующая точка: 77,40,56 – построена сторона ромба AB и отрезок f , задающий направление его первой диагонали.

Построим вторую диагональ BD (рис. 5.11в, г). Строим диагональ из двух отрезков. Первый из них – это перпендикуляр к отрезку f . Вторым – его копия, с помощью которой мы удлиним его в 2 раза:

- ◆ Отрезок \ Первая точка: с привязкой «Конточка» укажите точку B \ Следующая точка: с привязкой «Нормаль» укажите диагональ f – построен отрезок BE как половина второй диагонали;
- ◆ Копировать \ укажите отрезок BE \ Базовая точка: с привязкой «Конечная» укажите точку B \ Вторая точка: с привязкой «Конечная» укажите точку E – построена вторая половина диагонали BD .

Построим стороны ромба (см. рис. 5.11з):

- ◆ постройте отрезок по точкам AD ;
- ◆ копируйте отрезок AB из точки A в точку D – построен отрезок DC ;
- ◆ постройте отрезок по точкам BC – ромб построен;
- ◆ придайте модели наглядность построением проекции ромба на плоскость Π_1 ;
- ◆ сохраните файл с именем «Ромб.dwg».

Проверка построенной модели ромба

- ◆ Установите ПСК по трем вершинам в плоскость ромба, например по точкам A, B, D (см. рис. 5.11з).
- ◆ Командой «Список» выведите на экран свойства четырех сторон ромба.
- ◆ В текстовом окне в списках данных отрезков убедитесь, что все стороны имеют Z -координаты конечных точек, равные нулю, т. е. все они находятся в одной плоскости.
- ◆ В том же текстовом окне найдите, что все стороны имеют равную 3D-длину.

Вывод: построенный четырехугольник является плоским и все его стороны имеют равную длину. Следовательно, это ромб.

6.8.3. Построение ромба. Алгоритм начертательной геометрии

По условиям задачи (см. рис. 5.11а, б) отрезок f , задающий направление одной из диагоналей ромба, является фронталью, поскольку Y -координаты его конечных точек взаимно равны. Следовательно, одна диагональ параллельна плоскости Π_2 .

Согласно свойствам ромба, вторая диагональ перпендикулярна первой. То есть в рассматриваемой задаче диагонали образуют прямой угол, одна сторона которого параллельна Π_2 . Согласно теореме о проецировании прямого угла (см. раздел 5.9) между фронтальными проекциями диагоналей образуется угол 90° (рис. 6.6б). При решении учитываем еще два свойства ромба: диагонали в точке пересечения делятся пополам и все стороны ромба равны по длине, а противоположные стороны взаимно параллельны.

Последовательность решения:

- ◆ по координатам (см. рис. 5.11б) постройте на чертеже проекции отрезков AB и F (рис. 6.6а);

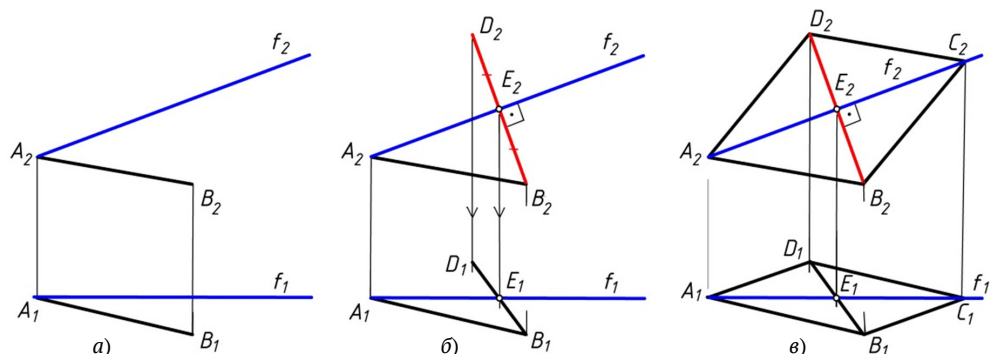


Рис. 6.6. Чертеж ромба:

а – дано; *б* – построение второй диагонали; *в* – итоговый чертеж

- ◆ на фронтальной проекции (рис. 6.6б) из точки B_2 строим перпендикуляр к проекции диагонали – отрезку f_2 . На продолжении B_2E_2 находим точку D_2 из условия равенства длин отрезков B_2E_2 и D_2E_2 ;
- ◆ строим отрезок A_2D_2 . Строим стороны C_2D_2 и B_2C_2 отрезками, параллельными и равными по длине противоположным сторонам проекции ромба (рис. 6.6в) – построена фронтальная проекция ромба.

Для построения горизонтальной проекции ромба по проекционной связи находим точку E_1 (рис. 6.6б). Удвоением отрезка B_1E_1 находим точку D_1 . Из условия параллельности и равенства длин противоположных сторон строим проекции сторон B_1C_1 и C_1D_1 . Чертеж построен.

Для проверки точности построений следует проверить равенство длин A_2E_2 и E_2C_2 и принадлежность точек C_1 и C_2 единой вертикальной линии связи (рис. 6.6в).

Приведенный алгоритм НГ применим лишь для частного случая построения ромба при условии, что отрезок f является отрезком прямой уровня и действует теорема о проецировании прямого угла. Это отличает его от рассмотренного выше универсального 3D-алгоритма построения ромба (см. раздел 6.8.2).

6.8.4. 3D-модель перпендикуляра к плоскости

Рассмотрим построение модели, приведенной в разделе 5.8.2 на рис. 5.12а:

- ◆ создайте файл на основе шаблона, перейдите в окно аксонометрии, проверьте установку МСК;
- ◆ по координатам (см. рис. 5.12б) постройте треугольник $\Delta(ABC)$ и создайте из него область;
- ◆ установите ПСК в плоскость треугольника по точкам A, C, B . По пиктограмме осей убедитесь, что Z -ось ПСК направлена перпендикулярно плоскости;
- ◆ включите режим ортогональных построений «ОРТО».

Для построения перпендикуляра к плоскости из заданной точки P :

- ◆ постройте отрезок прямой из точки P , направив отрезок параллельно оси Z в сторону плоскости. Длину отрезка можно задать произвольно;

- ♦ укажите отрезок и откройте панель «Свойства». Для второй точки отрезка в панели задайте координату $Z = 0$.

Для построения перпендикуляра из точки, принадлежащей плоскости, например из точки P' :

- ♦ начните построение отрезка, указав заданную точку P' как его первую точку. Переместите курсор в режиме «ОРТО» в направлении, параллельном оси Z ПСК. С клавиатуры введите значение длины отрезка. Можно задать длину курсором произвольно, затем редактировать отрезок в панели «Свойства»;
- ♦ придайте модели наглядность;
- ♦ постройте автоматизированный чертеж модели (см. рис. 5.12г);
- ♦ сохраните файл модели с именем «Перпендикуляр к плоскости.dwg».

6.8.5. Построение перпендикуляра к плоскости.

Алгоритм начертательной геометрии

Выше была рассмотрена задача построения перпендикуляра к плоскости с применением 3D-моделирования (см. рис. 5.12, раздел 6.8.4). Теперь решим ту же задачу с помощью методов начертательной геометрии. Координаты исходных точек оставим такими же, чтобы можно было наглядно сравнить полученное построение с результатом, полученным по 3D-модели.

Задача. Построить перпендикуляр t из точки P к плоскости треугольника $D(ABC)$. Найти основание и длину перпендикуляра.

- ♦ По координатам (см. рис. 5.12б) постройте проекции треугольника и точки P (рис. 6.7а).

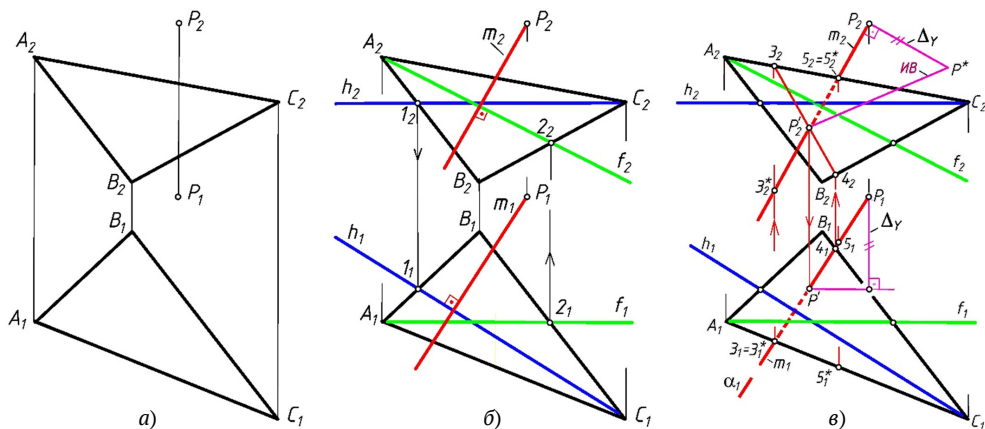


Рис. 6.7. Алгоритм НГ построения перпендикуляра из точки на плоскость:

а – дано; б – построение перпендикуляра;
в – основание перпендикуляра и его истинная величина

Прямая t перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна двум пересекающимся прямым этой плоскости. В качестве двух прямых плоскости задают

горизонталь h и фронталь f этой плоскости. С каждой из них прямая m образует прямой угол. Согласно теореме о проецировании прямого угла (см. раздел 5.9), если отрезок перпендикулярен горизонтали, то угол между проекцией отрезка и проекцией горизонтали на плоскости Π_1 отображается в прямой угол. Аналогично угол с фронталью отображается в прямой угол на плоскость Π_2 . На этой основе строим проекции отрезка перпендикуляра к плоскости треугольника. Последовательность построений следующая.

Строим проекции горизонтали h_1, h_2 и проекции фронтали f_1, f_2 (см. разделы 5.6, 6.5.2) как главных прямых плоскости $\Delta(ABC)$. На Π_1 из точки P_1 под прямым углом к h_1 строим горизонтальную проекцию перпендикуляра m_1 . На Π_2 из точки P_2 под прямым углом к f_2 строим фронтальную проекцию перпендикуляра m_2 . Перпендикуляр m построен, поскольку построены две его проекции m_1 и m_2 .

Находим основание перпендикуляра. Основанием является точка P' пересечения перпендикуляра m с плоскостью $\Delta(ABC)$. Для нахождения P' решаем первую позиционную задачу (см. разделы 5.5 и 6.4). Вводим горизонтально проецирующую секущую плоскость α , задаем ее проекцией α_1 (рис. 6.7в). Находим отрезок $(3_1, 4_1)$, по проекционной связи строим отрезок $(3_2, 4_2)$. На пересечении $(3_2, 4_2)$ с m_2 находим точку P'_2 . По проекционной связи находим P'_1 . Основание перпендикуляра m найдено.

Считая треугольник непрозрачным, определяем видимость прямых. Для этого применяем метод конкурирующих точек для скрещивающихся прямых (см. раздел 3.4.3). По горизонтально конкурирующим точкам 3, 3* определяем видимость на Π_1 . По фронтально конкурирующим точкам 5, 5* определяем видимость на Π_2 . Невидимые участки построенного перпендикуляра отображаем штриховой линией.

Для определения длины (истинной величины ИВ) отрезка перпендикуляра (P, P') применяем способ прямоугольного треугольника. Для этого отрезок Δu , являющийся разностью глубин конечных точек отрезка, откладываем под прямым углом к фронтальной проекции этого отрезка и строим биссектрису треугольника (P_2, P_2^*, P'_2) . Ее длина равна искомой длине отрезка построенного перпендикуляра (P, P') .

При правильно выполненных построениях получим полное совпадение результатов, полученных автоматическим построением чертежа (см. рис. 5.12г) и методом начертательной геометрии. Сравнительные выводы о наглядности и сложности методов сделайте сами.

6.8.6. Плоскость, касательная к сфере. Алгоритм 3D

Рассмотрим построение модели, приведенной в разделе 5.8.3, рис. 5.13а.

- ◆ Создайте файл на основе шаблона.
- ◆ 3D-инструменты \ Прямое моделирование \ Сфера  \ Центр: 48.5,35,43 \ Радиус: 25 – построена сфера радиусом 25.

Строим отрезок радиуса сферы из ее центра в точку касания. Положение точки касания на поверхности сферы зададим из условия наглядности модели. При-

меним для точки касания относительные сферические координаты (см. раздел 2.10.5), задав ее положение относительно центра сферы:

- ◆ Отрезок \ Первая точка: с объектной привязкой «Центр» укажите сферу \ укажите следующую точку: @25<247<45 – построен отрезок радиуса сферы.

Установим ПСК, задав Z-ось вдоль отрезка радиуса. Начало координат зададим в точке касания:

- ◆ ПСК «Направление оси Z»  \ Укажите начало ПСК: с привязкой «Центр» укажите сферу \ Точка на положительном луче оси Z: с привязкой «Конточка» укажите конец отрезка радиуса в точке касания;
- ◆ ПСК \ Начало \ укажите точку касания – плоскость XY установлена в точку касания и является касательной плоскостью.

Для наглядности построим в плоскости XY квадрат с центром в начале координат и стороной 50:

- ◆ включите режим «ОРТО»;
- ◆ Построения \ Многоугольник  \ Число сторон: 4 \ Укажите центр многоугольника;
- ◆ 0,0 \ Задайте способ построения: «Описанный вокруг окружности» \ Радиус окружности: 25 – построен квадрат как полилиния;
- ◆ придайте модели наглядность. Квадрат преобразуйте в область и в панели «Свойства» придайте области прозрачность 50;
- ◆ сохраните файл с именем «Плоскость, касательная к сфере .dwg».

6.8.7. Плоскость, равноудаленная от двух заданных точек.

Алгоритм 3D

Строим отрезок KM (см. рис. 5.13б):

- ◆ Отрезок \ Первая точка: 16,23,36 – точка K \ Укажите следующую точку: 82,49,69 – точка M ;
- ◆ установите ПСК, задав Z-ось вдоль отрезка KM . Начало координат задайте в средней точке отрезка – точке N , второй точкой оси Z задайте точку K – плоскость XY установлена как искомая плоскость, равноудаленная от точек K, M ;
- ◆ в плоскости XY постройте квадрат с центром в точке 0,0 со стороной 50.

6.8.8. 3D-модель пирамиды

Рассмотрим задачу, которая объединяет темы «Плоскость, перпендикулярная прямой» и «Главные прямые плоскости» (рис. 6.8).

Построить пирамиду, одним из боковых ребер которой является заданный отрезок PS . Основанием пирамиды является треугольник, плоскость которого перпендикулярна этому отрезку. Ребра треугольника основания образованы отрезками главных прямых плоскости.

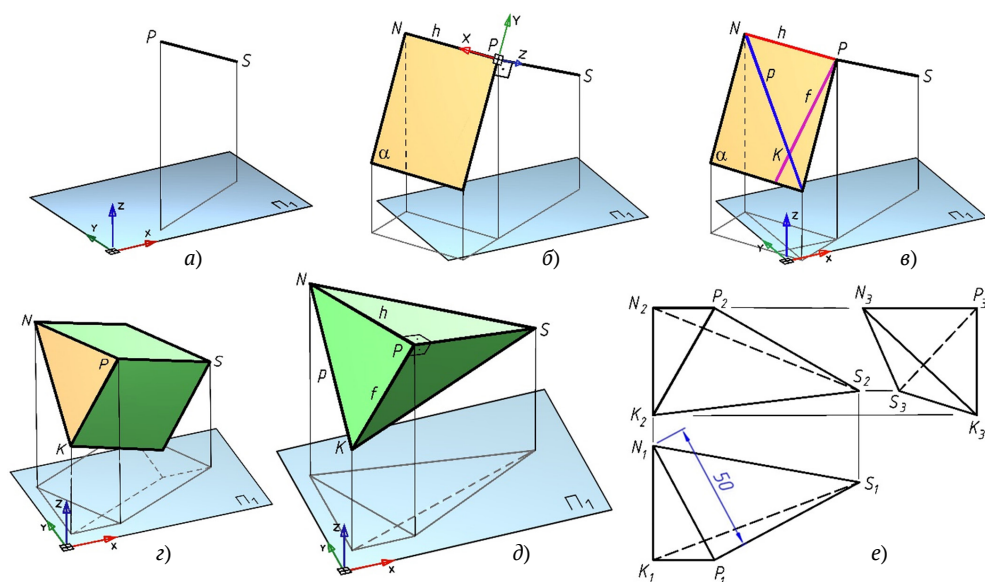


Рис. 6.8. 3D-модель пирамиды:

а – дано; *б* – плоскость основания; *в* – главные прямые основания;
г – призма; *д* – пирамида; *е* – автоматизированный чертёж пирамиды

Параметры пирамиды: координаты точек в МСК: $P(30, 10, 88)$, $S(86, 40, 56)$. Длина отрезка горизонтали в основании пирамиды $NP = 50$ мм.

- ◆ Отрезок  \ 30,10,88 \ 86,40,56 – построен отрезок PS , являющийся ребром пирамиды (рис. 6.8а).
- ◆ Вид \ Координаты \ ПСК «Направление оси Z»  \ Укажите начало ПСК: укажите точку P \ Точка на положительном луче оси Z: укажите точку S – установлена ПСК осью Z вдоль отрезка – задана плоскость основания пирамиды как плоскость XY ПСК (рис. 6.8б).

При задании ПСК с опцией «Направление оси Z» ось X пиктограммы осей ПСК автоматически устанавливается параллельно плоскости XY МСК, т. е. параллельно плоскости Π_1 . Это позволяет при установленной ПСК построить горизонталь как отрезок вдоль оси X:

- ◆ Отрезок \ 0,0 \ 50,0 – построен отрезок PN горизонтали h .

Согласно алгоритму построения главных прямых (см. раздел 5.6.3) строим сектор поверхности выдавливанием горизонтали вдоль оси Y на величину 60 мм в сторону Π_1 (рис. 6.8в):

- ◆ 3D-инструменты \ Режим моделирования \ Прямое \ Прямое моделирование \ Выдавливание  \ Выберите объект для выдавливания: укажите отрезок горизонтали \ Направление \ Определите начальную точку направления: 0,0 \ Определите конечную точку направления: 0, -60 – создан прямоугольник α в плоскости ПСК.

Построим главные прямые основания пирамиды: фронталь f через точку P и профильную прямую p через точку N или K как сечения сектора α координатными плоскостями МСК (рис. 6.8в):

- ◆ Вид \ Координаты \ МСК  – восстановлена МСК;
- ◆ 3D-инструменты \ Режим моделирования \ Прямое \ Прямое моделирование \ Сечение  \ Выберите объекты: укажите сектор α \ Опция ZX \ Точка на плоскости ZX: с объектной привязкой укажите точку P – построен отрезок фронтали f ;
- ◆ Сечение  \ Выберите объекты: укажите сектор α \ Опция YZ \ Точка на плоскости YZ: с объектной привязкой укажите точку N – построен отрезок профильной прямой p .

Построим треугольник основания NPK как 3D-полилинию:

- ◆ Построения \ 3D-полилиния  \ укажите точки N, P, K \ Замкнуть – построен замкнутый треугольник основания пирамиды (рис. 6.8г).

Искомая пирамида является по определению «неправильной» и не может быть построена одноименной командой как геометрический примитив. Поэтому для ее получения первоначально построим призму, затем ототрежем от нее половину диагональной плоскостью SNK . Построим призму выдавливанием треугольника (NPK) по траектории отрезка PS :

- ◆ Выдавливание  \ Выберите объект для выдавливания: укажите треугольник (NPK) \ Траектория \ Выберите траекторию выдавливания: укажите отрезок PS – построена призма (рис. 6.8з);
- ◆ 3D-инструменты \ Режим моделирования \ Прямое \ Прямое моделирование \ Разрез  \ 3 точки \ с объектной привязкой укажите точки режущей плоскости S, N, K \ Выберите сторону, которую необходимо оставить: укажите точку P – пирамида построена (рис. 6.8д).

Чертеж пирамиды (рис. 6.8е) построен командами «2D Вид»  и «2D Проекционный вид»  с последующим оформлением – простановкой точек и линий проекционной связи. Для контроля правильности построения на чертеже представлен размер длины горизонтального ребра основания, равный 50 мм.

- ◆ Сохраните файл с именем «Пирамида .dwg».

6.8.9. Построение плоскости, перпендикулярной прямой.

Алгоритм НГ

По алгоритму НГ плоскость, перпендикулярную заданной прямой, задают двумя взаимно пересекающимися главными прямыми искомой плоскости. Каждая из прямых должна быть перпендикулярна заданной прямой. Для этого, согласно теореме о проецировании прямого угла (см. раздел 5.9), проекции главных прямых на плоскостях, которым они параллельны, должны быть перпендикулярны проекциям заданной прямой.

На рис. 6.9 показано построение плоскости Δ , перпендикулярной отрезку SP в точке P . Плоскость Δ задана горизонталью h и фронталью f , проходящими через точку P , т. е. пересекающимися в этой точке. На плоскости Π_1 проекция горизонтали h_1 перпендикулярна проекции отрезка S_1P_1 . На плоскости Π_2 проекция фронтали f_1 перпендикулярна проекции отрезка S_2P_2 .

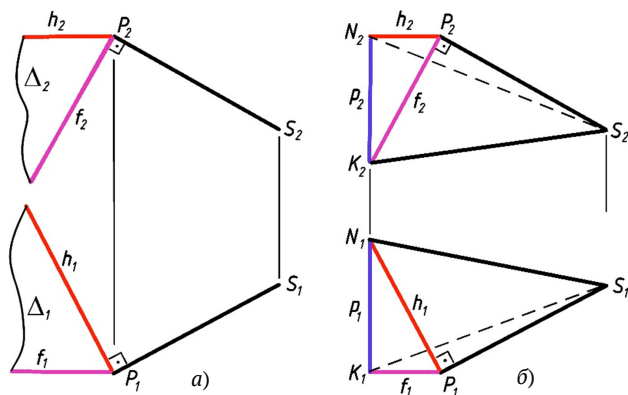


Рис. 6.9. Плоскость, перпендикулярная прямой. Алгоритм НГ:
а – чертеж плоскости; б – чертеж пирамиды

Если отрезок SP принять за отрезок радиуса сферы, имеющей центр в точке S (см. отрезок AC , рис. 5.13а), то построен чертеж плоскости Δ , которая является касательной к этой сфере в точке P .

На рис. 6.9б показан чертеж пирамиды, 3D-модель которой показана на рис. 6.8. Отрезок SP является боковым ребром, треугольник основания NPK задан отрезком горизонтали PN , фронтали PK и профильной прямой NK . Отрезки PN и PK по построению их проекций перпендикулярны отрезку SP , поэтому плоскость основания также перпендикулярна ребру SP . Длина проекции горизонтали P_1N_1 задана 50 мм. Проекция точки K определена на пересечении проекций фронтали и профильной прямой. Построены боковые ребра SN и SK . Видимость ребер как скрещивающихся прямых определена методом конкурирующих точек. Невидимые ребра выполнены штриховой линией.

Для сравнения автоматизированный чертеж этой пирамиды – см. выше рис. 6.8е.

6.8.10. Модели взаимно перпендикулярных плоскостей.

Алгоритмы 3D и начертательной геометрии

Рассмотрим алгоритмы построения 3D-моделей, приведенных в разделе 5.8.4 на рис. 5.14.

Массив перпендикулярных плоскостей. Алгоритм 3D (к рис. 5.14а)

Основой модели является отрезок AP :

- ♦ создайте файл на основе шаблона;

- ◆ Отрезок \ укажите точку: 76,14,100 \ Следующая точка: 50,39,28 – построен отрезок AP .

Построим квадрат в плоскости α с центром в точке P . Установим ПСК в плоскость α :

- ◆ ПСК \ Направление оси Z  \ с объектной привязкой укажите точку P \ укажите точку A ;
- ◆ Прямоугольник из центра  \ Центр прямоугольника: 0,0 \ Размеры \ Длина прямоугольника: 35 \ Ширина прямоугольника: 35 \ дважды укажите курсором произвольную точку – построен квадрат со стороной 35, параллельной оси X МСК;
- ◆ для наглядности модели можно повернуть  квадрат на 10–20° вокруг оси Z ПСК;
- ◆ создайте область из прямоугольника.

Построим прямоугольник γ размерами 15×33 как элемент кругового массива:

- ◆ ПСК \ 3 точки \ Новое начало координат; 0,0 \ Укажите точку по оси X ;
- ◆ укажите один из углов квадрата \ укажите точку с положительной Y -координатой;
- ◆ укажите точку A – ПСК установлена в плоскость γ ;
- ◆ включите режим «ОРТО»;
- ◆ Прямоугольник по 3 точкам  \ Первая точка прямоугольника: 0,20 \ Вторая точка прямоугольника: переместите курсор по оси X и введите 15 \ Третья точка прямоугольника: переместите курсор по оси Y и введите 33 – построен прямоугольник γ ;
- ◆ создайте область из прямоугольника γ .

Построим круговой массив из прямоугольников γ :

- ◆ установите (верните) ПСК осью Z по оси отрезка PA ;
- ◆ Круговой массив  \ Выбор объектов: укажите область γ \ Задайте центральную точку массива: 0,0 \ Элементы \ Число элементов в массиве: 6 – построен массив из шести прямоугольников γ ;
- ◆ примените команду «Разбивка» и выделите области прямоугольников из массива;
- ◆ придайте модели наглядность.
- ◆ сохраните файл с именем «Перпендикулярные плоскости Массив.dwg».

Плоскость, перпендикулярная двум плоскостям.

Алгоритм 3D (к рис. 5.14б)

Строим модель – см. рис. 5.14б:

- ◆ в новом файле на основе шаблона в МСК постройте отрезки AP и AB по точкам $A(41,6,109)$, $P(24,38,38)$, $B(75,30,41)$;
- ◆ постройте квадраты плоскостей α и β (см. квадрат α , рис. 5.14а);

- ◆ установите ПСК по точкам A , P , B и проставьте угловой размер между отрезками AP и AB ;
- ◆ создайте контур для области γ из двух боковых отрезков и сплайна. На основе этого контура создайте область;
- ◆ придайте модели наглядность;
- ◆ сохраните файл с именем «Плоскость, перпендикулярная двум .dwg».

Модель трех плоскостей. Алгоритм 3D

Построим 3D-модель, приведенную на рис. 5.14в:

- ◆ в новом файле на основе шаблона по угловым точкам координатных плоскостей постройте отрезок AC ;
- ◆ ПСК \ Направление оси Z \ с объектной привязкой укажите точку A \ укажите точку C ;
- ◆ Точка \ 0,0,48 – поставлен маркер в точку B ;
- ◆ ПСК \ Начало \ Укажите начало ПСК: 0,0,93 – начало перенесено в точку P , плоскость XY – установлена в плоскости δ ;
- ◆ постройте квадрат плоскости δ со стороной 35. На основе квадрата создайте область.

Построим трапецию $ABKD$:

- ◆ установите МСК;
- ◆ постройте точку K как проекцию точки B на плоскость Π_1 ;
- ◆ Построения \ 3D-полилиния \ последовательно укажите точки A , B , K , D \ Замкнуть – построен контур трапеции;
- ◆ создайте область на основе контура трапеции;
- ◆ постройте трапеции для плоскостей β и γ ;
- ◆ придайте модели наглядность;
- ◆ сохраните файл с именем «Три перпендикулярные плоскости .dwg».

Плоскость, перпендикулярная двум плоскостям. Алгоритм НГ

Рассмотрим решение задачи, 3D-модель которой приведена на рис. 5.14б. Решение выполним на проекционном чертеже.

На чертеже (рис. 6.10) заданы две плоскости $\alpha(a \parallel b)$ и $\beta(c \parallel d)$, каждая из которых определена двумя параллельными прямыми. Задана точка A .

Задача: построить плоскость γ , проходящую через точку A и перпендикулярную плоскостям α и β . Дополнительно необходимо определить основания и видимость перпендикуляров, построенных из точки A на эти плоскости.

Искомую плоскость зададим отрезками двух перпендикуляров AP и AB , построенных из точки A на плоскости α и β . Перпендикуляры строим согласно алгоритму, приведенному выше в разделе 6.8.9. Для плоскости α алгоритм построения перпендикуляра AP следующий.

1. Строим проекции горизонтали h . Произвольно задаем положение проекции h_2 и по точкам 1, 2 находим горизонтальную проекцию h_1 .
2. Строим проекции фронтали f . Произвольно задаем проекцию f_1 и по точкам 3, 4 находим фронтальную проекцию f_2 .
3. Согласно теореме о проецировании прямого угла задаем направление перпендикуляра из точки A . Для этого на Π_2 из точки A_2 проводим отрезок, перпендикулярный проекции фронтали f_2 . На Π_1 из точки A_1 проводим отрезок, перпендикулярный h_1 .
4. Находим основание перпендикуляра – точку P . Для этого решаем задачу о пересечении отрезка с плоскостью (см. выше, раздел 6.4.1). Вводим горизонтально проецирующую плоскость δ , включающую в себя горизонтальную проекцию перпендикуляра A_1P_1 . Находим отрезок $(5_1, 6_1)$ как горизонтальную проекцию отрезка линии пересечения плоскостей δ и α . На Π_2 находим пресечение фронтальных проекций (5_2-6_2) и перпендикуляра A_2P_2 – точку P_2 . По проекционной связи находим точку P_1 .

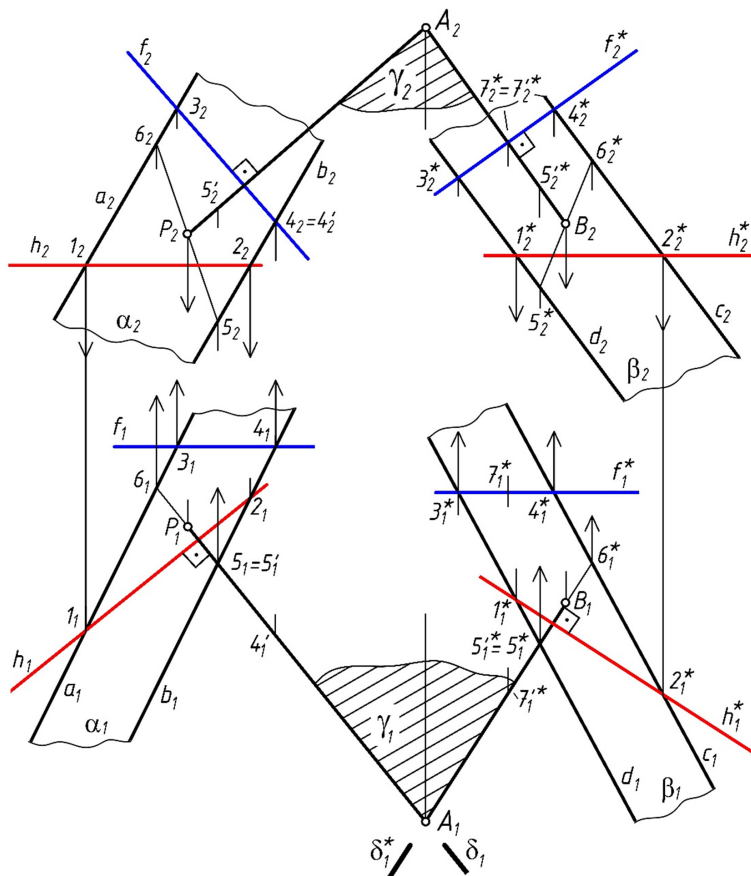


Рис. 6.10. Построение плоскости γ , перпендикулярной плоскостям α и β

5. Определяем видимость отрезка AP . На Π_2 отмечаем фронтально конкурирующие точки 4 и 4', по их горизонтальным проекциям делаем вывод, что перпендикуляр AP расположен перед отрезком b и на виде спереди является видимым. На Π_1 отмечаем горизонтально конкурирующие точки 5 и 5' и по их фронтальным проекциям делаем вывод, что перпендикуляр AP расположен над прямой b и на виде сверху также является видимым.
6. Повторяем алгоритм построения для перпендикуляра AB из точки A на плоскость β .
7. Найденные проекции отрезков AP и AB определяют искомую плоскость γ . Для наглядности штриховкой выделяем сектор этой области.
8. Оформляем чертеж.

6.8.11. Модель к теореме о проецировании прямого угла

Для модели с горизонталью (см. рис. 5.15а)

Построим отрезки AB и AC :

- ◆ создайте файл на основе шаблона, установите МСК, окно аксонометрии;
- ◆ постройте отрезок горизонтали $h(A, B)$. Координаты точек в МСК: $A(29, 38, 35)$, $B(52, 4, 35)$;
- ◆ Вид \ Координаты \ ПСК \ Направление оси Z  \ с объектной привязкой укажите точку A \ укажите точку B – ось Z направлена вдоль отрезка горизонтали;
- ◆ Отрезок \ 0,0 \ 30,30,0 – это координаты точки C в ПСК. Построен отрезок AC ;
- ◆ постройте проекции отрезков на плоскости Π_1 , Π_2 и Π_3 , проведите отрезки проецирующих прямых.

Дополнительная плоскость δ (см. рис. 5.15б)

- ◆ Скопируйте видовой экран аксонометрии вместе с моделью, расположив его на Листе справа. Перейдите в новый экран.
- ◆ В новом экране заморозьте слои с Π_2 и Π_3 вместе с проекциями модели на эти плоскости.
- ◆ ПСК \ Мировая  \ ПСК \ Начало  \ укажите точку A – установлена ПСК, параллельная МСК с началом в точке A .
- ◆ Главная \ Черчение \ Прямоугольник по 2 точкам  \ -9,-42 \ 30,20 – построен прямоугольник δ .
- ◆ Из контура прямоугольника создайте область.
- ◆ Через панель «Свойства» постройте проекцию отрезка AC на плоскость δ , т. е. на XU ПСК.
- ◆ Сохраните файл с именем «Проецирование прямого угла Горизонталь.dwg».

Для прямого угла с фронталью f (см. рис. 5.15в)

- ◆ Создайте файл на основе шаблона.
- ◆ Отрезок \ 13,29,29 \ 52,29,52 – построен отрезок DE фронтали f .
- ◆ ПСК \ Направление оси Z  \ укажите точку E \ укажите точку D – ось Z направлена вдоль фронтали.
- ◆ Отрезок \ 0,0 \ 22, -27 – построен отрезок EF .
- ◆ Постройте проекции отрезков на плоскости Π_1 , Π_2 и Π_3 , проведите отрезки проецирующих прямых.
- ◆ Дополнительно удлините отрезки EF и b_2 до пересечения в точке G .
- ◆ Сохраните файл с именем «Проецирование прямого угла Фронталь .dwg».

ГЛАВА 7

Метрические задачи (лекция 4)

Метрическими называют задачи на определение геометрических параметров объектов и моделей – размеров, расстояний, длин, углов, площадей, объемов и т. д. Рассмотрим методы и алгоритмы выполнения таких измерений в Платформе nanoCAD. Согласно направленности курса, основное внимание уделим 3D-методам решения задач в Платформе nanoCAD, но кратко рассмотрим и методы начертательной геометрии.

7.1. Метрические задачи в Платформе nanoCAD. Алгоритмы 3D

Часть метрических задач была рассмотрена в разделе 2.21. В нем были приведены команды Платформы nanoCAD, с помощью которых можно быстро определить геометрические параметры объектов – без дополнительных построений, достаточно просто указать нужный элемент. Это команды «Список», панель «Свойства», группа команд «Утилиты\Сведения», определяющие длину, площадь, периметр, объем и координаты точек.

Сейчас рассмотрим метрические задачи, требующие предварительных, зачастую сложных геометрических построений.

О точности определения метрических характеристик и параметров см. раздел 1.6.1.

7.1.1. Измерение расстояний

Расстояние от точки до прямой – это длина отрезка перпендикуляра, опущенного из точки на прямую. Его построение – см. раздел 6.8.1.

Расстояние от точки до плоскости – это Z-координата точки в ПСК, установленной в плоскость. Также это длина отрезка перпендикуляра, опущенного из точки на плоскость. Его построение – см. раздел 6.8.4.

Расстояние между параллельными прямыми. Необходимо предварительно убедиться, что прямые параллельны (см. раздел 3.4.1). Затем определить длину отрезка, являющегося общим перпендикуляром к параллельным прямым. Для его построения следует применить команду «Отрезок», первой точкой с объект-

ной привязкой указать произвольную точку одной из параллельных прямых, второй точкой с привязкой «Нормаль» указать вторую прямую. Система автоматически определит положение второй точки. После построения отрезка его длину можно узнать через панель «Свойства» или команду «Список». Если нужно определить расстояние без построения, используйте команду «Дистанция».

Расстояние между прямой и плоскостью имеет смысл измерять только в случае, если прямая параллельна плоскости. Проверка и определение расстояния выполняются одновременно. Сначала необходимо установить ПСК в ту плоскость, к которой проводится измерение. Затем выбрать отрезок, представляющий прямую, и с помощью команды «Список» или панели «Свойства» определить Z -координаты его конечных точек. Если координаты одинаковы, значит прямая параллельна плоскости. При этом значение координаты Z и будет равно расстоянию между прямой и плоскостью.

Расстояние между двумя плоскостями – определяется для параллельных плоскостей. Необходимо установить ПСК в одну из плоскостей, проверить взаимную параллельность плоскостей (см. раздел 3.6.1) и определить Z -координату произвольной точки второй плоскости.

- Лектору: покажите примеры измерений расстояний между объектами, рассмотренные в данном разделе.

7.1.2. Измерения углов

Во всех задачах на измерение угла предварительно устанавливают ПСК в плоскость измерения угла и применяют команду измерения угла (Оформление \ Размеры \ ). В качестве сторон угла можно указать либо отрезки как стороны угла, либо вершину и две точки сторон угла. При перемещении курсором размерной линии измеряемый угол может быть показан как острый или тупой.

Угол между пересекающимися прямыми

Для измерения следует установить ПСК в плоскость пересекающихся прямых, например по трем точкам  отрезков. Далее применить команду измерения угла и проставить угловой размер.

- Лектору: в шаблоне постройте два отрезка пересекающихся прямых, например, по точкам $(0, 70, 70)(50, 35, 0)(100, 70, 70)$, и определите угол между ними.

Угол прямой с плоскостью

Это угол между прямой и ее проекцией на плоскость. Для наглядного построения угла следует построить ортогональную проекцию отрезка прямой на плоскость и измерить угол между самим отрезком и его проекцией как двумя пересекающимися прямыми (см. рис. 2.5, угол β).

Оптимальным вариантом определения угла является применение к отрезку команды «Список». Предварительно следует установить ПСК в плоскость. Выполнить команду и найти в списке данных отрезка показатель «Угол от плоскости XY » – это и есть угол с плоскостью или к нему дополнительный угол.

- Лектору: в шаблоне покажите определение угла между каким-либо пространственным отрезком и плоскостью Π_1 .

Угол между плоскостями

Возможны два варианта определения угла между плоскостями. Первый вариант – определение линейной величины двугранного угла. Ребро двугранного угла – это линия пересечения его граней. Для измерения следует установить ПСК осью Z вдоль ребра, построить проекции граней на плоскость XU или сечения граней этой плоскостью (или ей параллельной) и проставить угловой размер между проекциями или сечениями. Если выполнить команду «План», то на экране двугранный угол между плоскостями отображается в виде линейного угла. Пересекающиеся плоскости и отрезок линии пересечения становятся проецирующими: плоскости вырождаются в отрезки, линия пересечения отображается в точку.

На рис. 7.1а показано определение величины двугранного угла, заданного ребром a и точками C, D граней угла. На рис. 7.1б приведен вид в направлении оси Z ПСК, т. е. вдоль ребра двугранного угла, полученный командой «План» и наглядно показывающий угол между плоскостями.

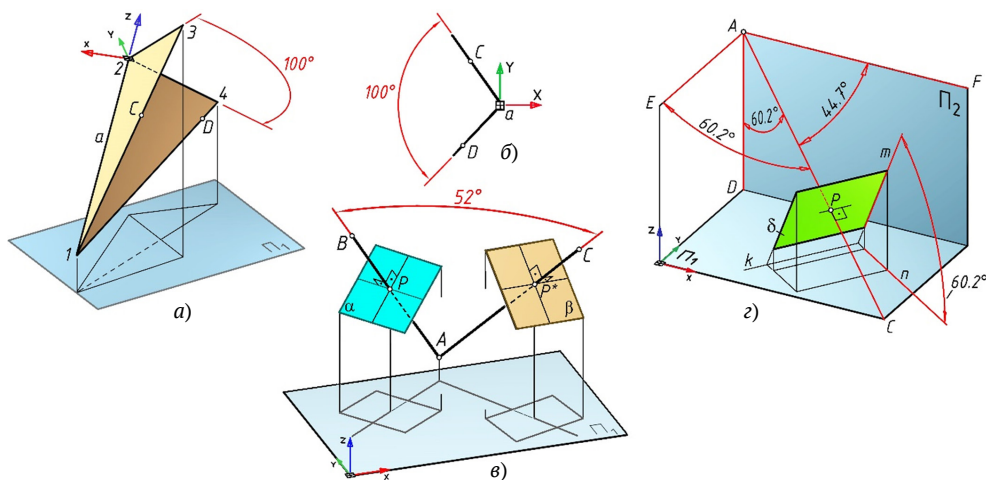


Рис. 7.1. Измерения углов между плоскостями:

a – двугранный угол; b – линейный угол двугранного угла;

γ – угол между перпендикулярами плоскостей; δ – угол с координатными плоскостями

Второй вариант определения угла между плоскостями основан на известном положении, что угол между плоскостями равен углу между перпендикулярами, опущенными на плоскости из произвольной точки пространства. Угол между перпендикулярами определяют как между отрезками пересекающихся прямых. На рис. 7.1в показано определение угла между плоскостями α и β . По условиям конкретной задачи или произвольно задают точку A (в рассматриваемом примере она задана произвольно из условий наглядности модели). Из этой точки опущены перпендикуляры AP и AP^* на плоскости. По точке A

и конечным точкам отрезков, точкам B и C (можно по точкам P, P^*), установлена ПСК и измерен угол между отрезками, являющийся углом между плоскостями.

На рис. 7.1г показано применение второго варианта для определения углов между плоскостью прямоугольника δ и координатными плоскостями Π_1, Π_2, Π_3 . Из точки A на плоскость δ опущен перпендикуляр AP . Из той же точки проведены отрезки перпендикуляров AD, AE, AF к координатным плоскостям соответственно Π_1, Π_2, Π_3 . Угол $\angle(AP, AD)$ является углом между плоскостями δ и Π_1 . Угол $\angle(AP, AE)$ – угол между плоскостью δ и Π_2 , угол $\angle(AP, AF)$ – угол между плоскостью δ и Π_3 .

В приведенном примере (см. рис. 7.1г) видим равенство углов между плоскостью δ и плоскостями Π_1 и Π_2 . Плоскости, имеющие равные углы наклона к плоскостям, называют «равнонаклоненными» к этим плоскостям, т. е. δ – плоскость, равнонаклоненная к Π_1 и Π_2 .

Дополнительно (рис. 7.1г) по алгоритму первого варианта построен угол $\angle(m, n)$ между плоскостями δ и Π_1 . С учетом того что сторона прямоугольника δ по построению задана параллельной Π_1 , найден отрезок k линии пересечения плоскостей. Стороны угла m и n определены в плоскости, перпендикулярной отрезку k . Найденный $\angle m, n = \angle(AP, AD)$.

Примеры определения угла между плоскостями также были приведены ранее на рис. 5.9д, 5.10г и 5.14б.

Можно сделать вывод: первый вариант является наглядным. Его применение рационально, если по условию задачи требуется построение линии пересечения плоскостей. Иначе следует применять второй вариант.

Алгоритмы построения и параметры 3D-моделей, показанных на рис. 7.1, приведены в разделах 8.1.1–8.1.3.

- Лектору: откройте файлы «Двугранный угол .dwg», «Угол между перпендикулярами плоскостей .dwg» (см. раздел 8.1.2), «Углы с координатными плоскостями .dwg». Определите угол между плоскостями α и β , задав вершину в одной из угловых точек шаблона.

7.1.3. Угол и расстояние между скрещивающимися прямыми

Угол между скрещивающимися прямыми определяется как угол между двумя пересекающимися прямыми, соответственно параллельными данным скрещивающимся прямым.

Для определения искомого угла необходимо одну из скрещивающихся прямых параллельно скопировать, совместив одну из ее точек с какой-либо точкой второй прямой. Плоскость, образованная пересекающимися прямыми, соответственно параллельными заданным, называют *плоскостью параллелизма скрещивающихся прямых*. Угол, измеренный между прямыми, образующими плоскость параллелизма, является углом между заданными скрещивающимися прямыми. Рассмотрим пример.

На рис. 7.2а, б приведен пример определения угла между отрезками скрещивающихся прямых a, b . Отрезок a скопирован из точки 2 в точку 4 в положение a' .

Образована плоскость двух пересекающихся прямых γ ($a' \cap b$) – это плоскость параллелизма заданных прямых a, b . В плоскости γ измерен угол между прямыми a' и b . Для измерения угла в плоскость γ установлена ПСК и проставлен угловой размер.

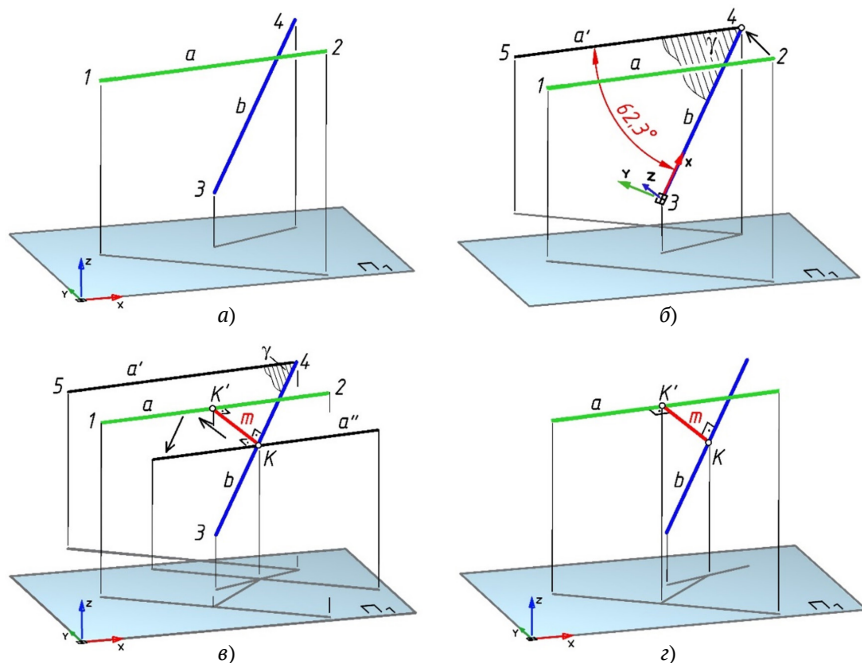


Рис. 7.2. Определение угла и расстояния между скрещивающимися прямыми:

a – отрезки скрещивающихся прямых;

γ – плоскость параллелизма и угол между отрезками; m – отрезок кратчайшего расстояния;

g – общий перпендикуляр к заданным прямым (проверка решения)

Расстоянием между скрещивающимися прямыми называется расстояние между двумя ближайшими точками этих прямых. Существуют различные методы и определения этого расстояния. Приведем одно из этих определений, известное из школьного курса стереометрии:

Расстоянием между скрещивающимися прямыми называют длину их общего перпендикуляра, т. е. отрезка, концы которого принадлежат этим прямым и угол между отрезком и каждой прямой является прямым углом. Сам отрезок общего перпендикуляра называют отрезком кратчайшего расстояния между скрещивающимися прямыми.

Рассмотрим алгоритм построения отрезка кратчайшего расстояния. Алгоритм имеет исторические корни. Это один из двух алгоритмов рассматриваемой задачи, приведенных в основополагающей работе Гаспара Монжа [6, стр. 56, 274]. Дадим современную 3D-реализацию алгоритма. В разделе 8.2.3 для сравнения приведем традиционную реализацию этого алгоритма методами начертательной геометрии.

Пусть даны отрезки a , b скрещивающихся прямых (рис. 7.2а). Необходимо построить отрезок кратчайшего расстояния между ними:

- 1) скопируйте отрезок a так, чтобы он пересек отрезок b . Скопированный отрезок назовем a' . Получена плоскость параллелизма γ ($a' \cap b$) (рис. 7.2б);
- 2) постройте ортогональную проекцию отрезка a на плоскость γ . Проекцию назовем a'' (рис. 7.2в);
- 3) из точки K ($a'' \cap b$) опустите перпендикуляр на отрезок a – построен отрезок $m \perp a$, являющийся искомым (рис. 7.2г);
- 4) через панель «Свойства» или командой «Список» определите длину отрезка m – это искомое расстояние между скрещивающимися прямыми.

Для проверки решения (рис. 7.2г) следует определить значения углов между найденным отрезком m и каждой из заданных прямых. При правильном решении они равны 90° .

Алгоритм построения 3D-модели (рис. 7.2) подробно изложен в разделе 8.1.4. В разделе 8.1.5 приведен дополнительный пример для скрещивающихся прямых, образованных диагоналями параллелепипеда, образованного координатными плоскостями шаблона. В разделе 8.2.3. для сравнения приведен алгоритм нахождения угла и отрезка кратчайшего расстояния на проекционном чертеже, т. е. средствами начертательной геометрии.

- Лектору: откройте файл «Угол и расстояние между скрещивающимися прямыми .dwg» (см. раздел 8.1.4). Покажите построение плоскости параллелизма и угла между скрещивающимися прямыми на примере диагоналей шаблона (раздел 8.1.5, рис. 8.2).

7.1.4. Кратчайшее расстояние между поверхностями

Рассмотрим метрическую задачу о нахождении кратчайшего расстояния между поверхностями, т. е. между двумя наиболее близко расположенными точками поверхностей. Точное решение задачи возможно лишь при особом взаимном положении поверхностей. Приведем два примера точного определения расстояния. Первый пример – при наличии у поверхностей общей плоскости симметрии; второй пример – если одна из поверхностей является проецирующей.

Общая плоскость симметрии та, которая делит пополам сразу обе поверхности. Если поверхности имеют общую плоскость симметрии, то отрезок кратчайшего расстояния находится в этой плоскости.

Расстояние от сферы до конуса

На рис. 7.3 показано построение отрезка кратчайшего расстояния между поверхностью прямого кругового конуса и сферы (рис. 7.3а). Поверхности имеют общую плоскость симметрии, которая определяется осью конуса и центром сферы. Объекты построены как тела (3D-солиды). Командой «Сечение» получено сечение тел плоскостью симметрии (рис. 7.3б). В сечении из центра сферы опущен перпендикуляр CA на образующую конуса (рис. 7.3в). Отрезок AB , как часть этого перпендикуляра, является искомым отрезком кратчайшего расстоя-

ния между поверхностями. Простановкой размера определена длина отрезка AB , являющаяся величиной кратчайшего расстояния между поверхностями.

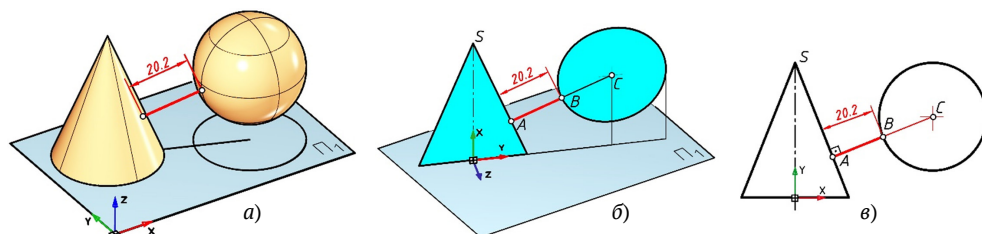


Рис. 7.3. Расстояние между поверхностями конуса и сферы:
а – 3D-модель; б – сечение плоскостью симметрии; в – истинный вид сечения

Расстояние от тора до цилиндра

Если одна из поверхностей является проецирующей, т. е. все ее точки могут быть на некоторую плоскость отображены в виде линии, то кратчайшее расстояние между поверхностями можно определить по проекциям поверхностей на эту плоскость. Примерами являются цилиндрические и призматические поверхности.

На рис. 7.4 показано решение сложной метрической задачи на построение отрезка кратчайшего расстояния между поверхностью тора и прямого кругового цилиндра (рис. 7.4а). Цилиндр – проецирующая поверхность. Построены проекции тора и цилиндра на плоскость, перпендикулярную оси цилиндра (рис. 7.4б, в). На проекции тор отображен кривой $v1$, цилиндр отображен окружностью $v2$. Из центра окружности $v2$ опущен перпендикуляр (1, 4) на кривую $v1$. Технические средства Платформы nanoCAD позволяют это сделать применением в точке 4 объектной привязки «Нормаль». Построенный отрезок (3, 4) является проекцией искомого отрезка (5, 6) кратчайшего расстояния. Длина отрезка (3, 4) равна искомой величине расстояния между поверхностями.

Чтобы найти сам отрезок кратчайшего расстояния (5, 6), определена точка 5, в которой этот отрезок пересекает тор. Для этого построен отрезок m , параллельный оси цилиндра. Построено сечение тора плоскостью, заданной точками 1, 2, 4. В сечении тора получена кривая s (так называемая спирическая кривая). Точка 5 является точкой касания отрезка m с кривой s (а также точкой касания отрезка m с поверхностью тора). Из точки 5 опущен перпендикуляр (5, 7) на ось цилиндра. Отрезок (5, 6), как часть перпендикуляра, является искомым отрезком кратчайшего расстояния между заданными поверхностями.

Для наглядности модели выполнен разрез и удалена часть цилиндра (см. рис. 7.4г).

Алгоритмы построения рассмотренных 3D-моделей приведены в разделах 8.1.6 и 8.1.7.

○ Лектору:

- откройте файл «Расстояние от конуса до сферы .dwg» (см. раздел 8.1.6) и повторите построение отрезка расстояния между поверхностями;
- откройте файл «Расстояние от тора до цилиндра .dwg» (см. раздел 8.1.7) и поясните построения модели.

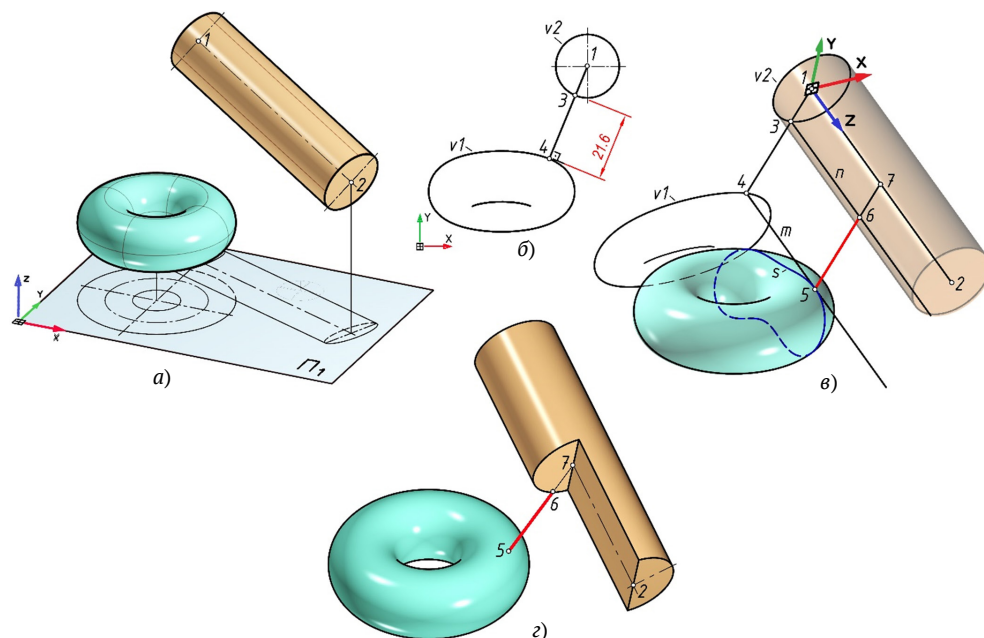


Рис. 7.4. Расстояние от тора до цилиндра:
 а – 3D-модели; б – проекции на плоскость, перпендикулярную оси цилиндра;
 в – 3D-построения; г – искомый отрезок кратчайшего расстояния

7.2. Метрические задачи в начертательной геометрии

Для решения метрических задач на чертеже необходимо, чтобы чертеж содержал проекцию, в которой определяемые размеры были истинными. Такие изображения назовем истинными проекциями, а вид в направлении, перпендикулярном их плоскости, называют истинным видом объекта. Если объект расположен произвольным образом относительно плоскостей проекций, то размеры его проекций, как правило, отличаются от истинных размеров объекта.

В начертательной геометрии разработаны способы преобразования чертежа, позволяющие получать истинные проекции и истинные виды объектов и на их основе решать метрические задачи.

7.2.1. Проецирование на дополнительную плоскость

Наиболее распространенный способ преобразования чертежа – это в дополнение к основным плоскостям проекций на плоскости Π_1 , Π_2 , Π_3 строить проекции объекта на дополнительные плоскости, добиваясь истинных проекций. Для этого в чертеже может потребоваться введение несколько дополнительных плоскостей.

Применяют четыре алгоритма преобразования чертежа введением дополнительных плоскостей, позволяющих в начертательной геометрии решать множество метрических задач:

- 1) преобразование прямой общего положения в прямую уровня;
- 2) преобразование прямой уровня в проецирующую прямую;
- 3) преобразование плоскости общего положения в проецирующую плоскость;
- 4) преобразование проецирующей плоскости в плоскость уровня.

Рассмотрим 3D-модели, поясняющие эти алгоритмы, их реализацию и примеры применения.

7.2.2. Преобразование прямой общего положения в прямую уровня

Рассмотрим пример. Требуется по чертежу определить длину отрезка прямой общего положения и углы его наклона к плоскостям проекций.

На рис. 7.5 приведена 3D-модель, поясняющая, как эта задача решается в начертательной геометрии. Показан отрезок AB прямой линии общего положения, проекции которого на Π_1 и Π_2 не отображают его длину и углы наклона к этим плоскостям. (рис. 7.5а). Для решения задачи введена дополнительная плоскость Π_4 , параллельная отрезку AB и перпендикулярная плоскости Π_1 (рис. 7.5б). Построена проекция отрезка на плоскость Π_4 . Поскольку отрезок AB параллелен плоскости, то длина проекции A_4B_4 равна длине отрезка AB .

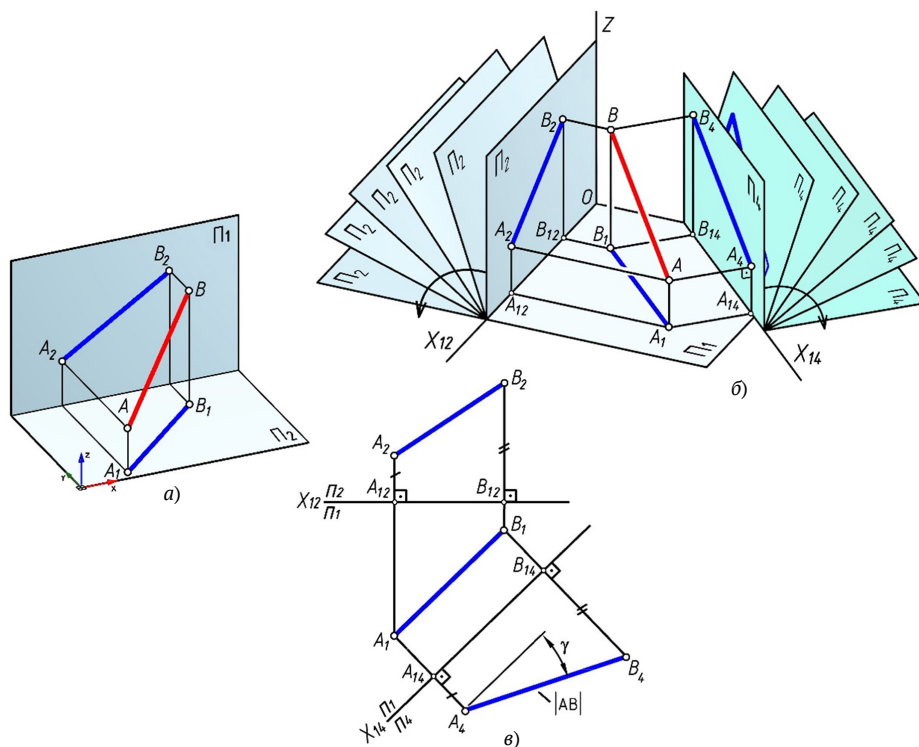


Рис. 7.5. Преобразование прямой общего положения в прямую уровня:
а – дано; б – 3D-модель преобразования; в – чертеж

Для получения чертежа (эпюра Монжа) выполнен поворот плоскости Π_4 вместе с проекцией A_4B_4 и отрезками проекционной связи. Поворот выполнен вокруг оси X_{14} , являющейся пересечением плоскостей Π_1 и Π_4 , до совмещения в единую плоскость с Π_1 . Кроме того, выполнен поворот плоскости Π_2 вокруг оси X_{12} до совмещения с плоскостью Π_1 (см. рис. 7.5б).

В результате совмещения плоскостей расположенные в них проекции образуют чертеж, который после оформления показан на рис. 7.5в. Чертеж содержит два эпюра Монжа. Первый эпюр образован проекциями на плоскости Π_1 и Π_2 , второй – на плоскости Π_1 , Π_4 . Оба имеют общую проекцию на Π_1 . Во втором эпюре проекция на Π_2 заменена на проекцию, построенную в плоскости Π_4 . Поэтому проецирование на дополнительную плоскость называют также *способом замены плоскостей проекций*.

Проекцию на Π_2 в приведенном примере называют «заменяемой» проекцией, проекцию на Π_4 – «новой» проекцией. Общим свойством преобразований чертежа проецированием на дополнительную плоскость является равенство координат проекций точек на заменяемой проекции и на новой проекции. В рассмотренном примере (см. рис. 7.5б) это равенство Z -координат проекций на Π_2 и на Π_4 . Например, для точки A длины отрезков (A_2-A_{12}) и (A_4-A_{14}) равны между собой, поскольку обе равны высоте точки A , которая на 3D-модели является длиной отрезка $(A-A_1)$. Поэтому при построении чертежа координаты точек новой проекции «берут» с заменяемой проекции. Это объясняет требование, чтобы вводимая плоскость была перпендикулярна сопрягаемой с ней плоскости.

Приведенный выше пример (см. рис. 7.5б, в) показывает применение первого алгоритма из приведенных выше (см. раздел 7.2.1), так как в эпюре Π_1 - Π_4 отрезок AB прямой общего положения стал фронталью, являющуюся прямой уровня. При этом длина (A_4-B_4) является истинной длиной отрезка AB , а угол γ равен углу между отрезком AB и плоскостью Π_1 .

Алгоритм построения 3D-модели приведен в разделе 8.1.8.

- Лектору: откройте файл «Преобразование прямой общего положения в прямую уровня.dwg» (см. раздел 8.1.8). По 3D-модели поясните построение чертежа.

7.2.3. Способ прямоугольного треугольника

На чертежах применяется сокращенный алгоритм преобразования прямой общего положения в прямую уровня. Рассмотрим этот алгоритм на примере чертежа, приведенного на рис. 7.5в.

В алгоритме (рис. 7.6а) ось X_{12} подразумевается проведенной через точку A_2 . Ось X_{14} совмещена с проекцией A_1B_1 . Сами оси не проводятся. От точки B_1 под прямым углом к отрезку проекции A_1B_1 построен отрезок, длина которого равна разности Z -координат проекции A_2B_2 . В результате построений образован прямоугольный треугольник A_1B_1B' . В нем длина гипотенузы A_1B' равна искомой длине отрезка AB , угол γ равен углу наклона отрезка к плоскости Π_1 .

На рис. 7.6б приведен второй вариант алгоритма определения длины того же отрезка AB . Здесь подразумевается введение дополнительной плоскости, перпендикулярной плоскости Π_2 . На фронтальной проекции построен прямо-

угольный треугольник A_2B_2A' , в котором длина гипотенузы также равна длине отрезка AB , угол β равен углу наклона отрезка к плоскости Π_2 .

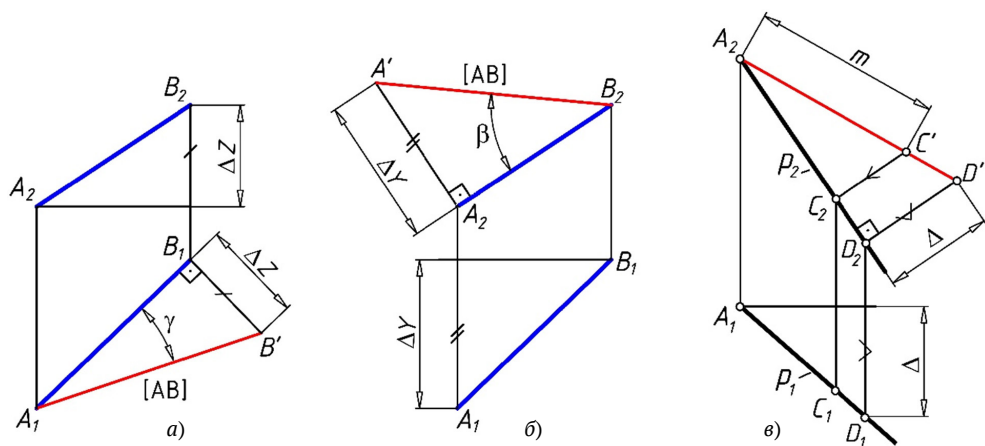


Рис. 7.6. Способ прямоугольного треугольника

В связи с геометрией построений приведенный алгоритм называется способом прямоугольного треугольника. Его формулировка: для определения длины отрезка прямой общего положения следует из конечной точки одной из проекций отрезка под прямым углом отложить разность расстояний концов отрезка до плоскости этой проекции, измеренную по другой его проекции. Полученную точку соединить со второй точкой проекции. Длина гипотенузы образованного прямоугольного треугольника равна длине отрезка.

На рис. 7.6в показано решение одной из задач на применение способа прямоугольного треугольника: на отрезке p найти точку C , удаленную от точки A на величину m . На горизонтальной проекции отрезка p_1 произвольно задана точка D_1 , на фронтальной проекции построен прямоугольный треугольник A_2D_2D' , в котором на гипотенузе AD' отложена длина m и построена точка C' . Затем обратным построением найдены проекции этой точки C_2 и C_1 .

○ Лектору: по рис. 7.6 покажите примеры применения способа прямоугольного треугольника.

7.2.4. Преобразование прямой уровня в проецирующую прямую

Задача: для отрезка AB прямой уровня задать дополнительную плоскость, на которой проекция отрезка является точкой (т. е. по отношению к искомой плоскости прямая, содержащая AB , будет проецирующей).

Эта задача может быть как самостоятельной или частью более общей задачи. Рассмотрим продолжение задачи преобразования отрезка AB (см. рис. 7.5а), в которой отрезок был преобразован в прямую уровня (фронталь). Дополнительно преобразуем его в отрезок проецирующей прямой.

Решение в виде плоскости Π_5 показано на рис. 7.7. Плоскость Π_5 задана перпендикулярно AB , поэтому на нее отрезок AB отображается в конкурирующие

точки $A_5 = B_5$, а сама прямая AB по отношению к Π_5 является проецирующей. Поскольку $AB \parallel \Pi_4$, то $\Pi_5 \perp \Pi_4$, поэтому для плоскости Π_5 вместе с Π_4 выполняются условия построения эпюра Монжа как проецирование на две взаимно перпендикулярные плоскости.

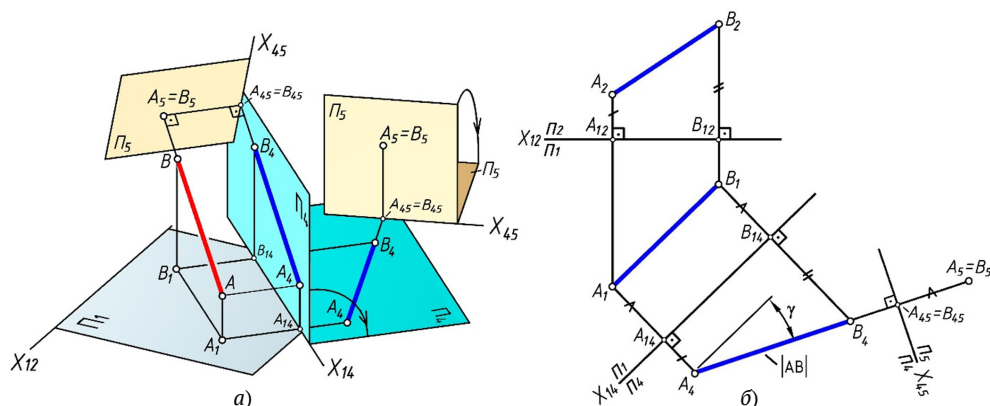


Рис. 7.7. Преобразование прямой уровня в проецирующую:
а – 3D-модель преобразования; б – чертеж

Для получения чертежа выполнены два вращения плоскостей. Первое – поворот плоскости Π_4 вместе с Π_5 вокруг оси X_{14} до совмещения Π_4 с Π_1 . Второе – поворот Π_5 вокруг оси X_{45} до совмещения с Π_4 и Π_1 . Выполнен также поворот Π_2 (на рис. 7.7а плоскость Π_2 не показана) вокруг оси X_{12} до совмещения с Π_1 . В результате Π_2 , Π_4 , Π_5 вместе со «своими» проекциями совмещены с плоскостью Π_1 и образуют основу чертежа, в котором прямая AB из прямой общего положения первоначально преобразована в прямую уровня, затем из прямой уровня – в проецирующую прямую.

На рис. 7.7б показан оформленный чертеж, в котором проекция A_4B_4 является результатом преобразования по алгоритму 1 (см. раздел 7.2.1), а проекция A_5B_5 – по алгоритму 2.

Построение 3D-модели приведено в разделе 8.1.9. Построение чертежа в автоматическом режиме – в разделе 8.2.1.

○ Лектору:

- откройте файл «Преобразование прямой уровня в проецирующую .dwg» (см. раздел 8.1.9). По 3D-модели поясните построение чертежа;
- откройте файл «Чертеж к преобразованию прямой .dwg» (см. раздел 8.2.1). Поясните автоматизированное построение чертежей на основе 3D-моделей.

7.2.5. Преобразование плоскости в проецирующую плоскость и плоскость уровня

Задача: определить истинный вид треугольника ABC, плоскость которого занимает общее положение.

На рис. 7.8а показана модель треугольника ABC , проекции которого значительно отличаются от истинного вида этого треугольника. На рис. 7.8б приведена 3D-модель решения на чертеже задачи построения истинной проекции треугольника.

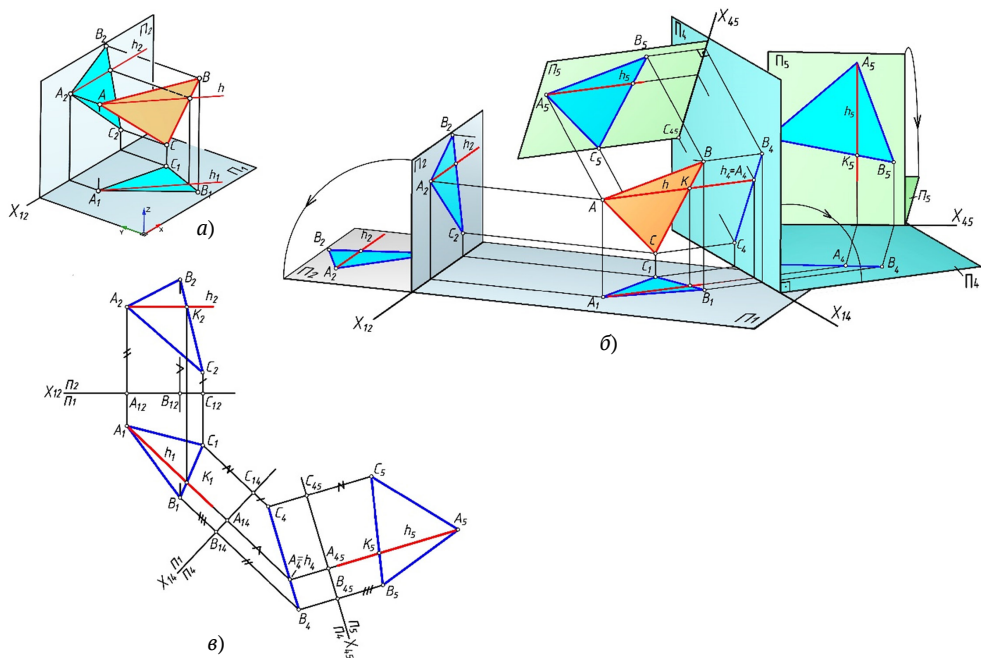


Рис. 7.8. Преобразование плоскости общего положения в плоскость уровня:
а – дано; б – 3D-модель преобразования; в – чертеж

Истинную проекцию можно получить на плоскости, параллельной плоскости треугольника ABC , на рис. 7.8 – на плоскости Π_5 . Но эта плоскость не перпендикулярна плоскостям Π_1 и Π_2 , т. е. не позволяет построить с ними эпюр Монжа. Поэтому решение выполняется в два этапа.

На первом этапе вводим дополнительную плоскость, на которую треугольник отображается в прямую линию, т. е. его плоскость становится проецирующей. Это алгоритм 3 (см. выше раздел 7.2.1). Его формулировка: *чтобы плоскость на чертеже стала проецирующей, в ней следует построить одну из прямых уровня и задать дополнительную плоскость перпендикулярно этой прямой*. (О прямых уровня см. разделы 5.6 и 6.5.)

В рассматриваемом примере в плоскости треугольника ABC построена горизонталь h . Построена дополнительная плоскость $\Pi_4 \perp h$. При этом «автоматически» выполняется условие $\Pi_4 \perp \Pi_1$, необходимое для построения эпюра Монжа с плоскостями Π_1 и Π_4 .

На втором этапе реализуется алгоритм 4. Для этого вводится плоскость $\Pi_5 \parallel B_4C_4$. По отношению к Π_5 заданная плоскость (ABC) стала плоскостью уровня. Поэто-

му проекция $A_5B_5C_5$ передает истинный вид треугольника (ABC). Плоскость Π_5 является перпендикулярной Π_4 , что позволяет строить эпюр для плоскостей Π_4 и Π_5 .

Для построения чертежа выполняют поворот плоскости Π_4 вместе с Π_5 вокруг оси X_{15} до совмещения Π_4 и Π_1 , затем поворот Π_5 вокруг оси X_{45} до совмещения Π_5 с Π_1 . Выполнен поворот Π_2 вокруг оси X_{12} до совмещения с Π_1 (рис. 7.8б). Проекции, расположенные в этих плоскостях, после совмещения плоскостей образуют основу чертежа, в котором проекция $A_5B_5C_5$ является истинной. Оформленный чертеж приведен на рис. 7.8в.

Построение 3D-модели приведено в разделе 8.1.10. Построение чертежа в автоматическом режиме – в разделе 8.2.2.

○ Лектору:

- откройте файл «Преобразование плоскости в плоскость уровня .dwg» (см. раздел 8.1.10). По 3D-модели поясните построение чертежа;
- откройте файл «Чертеж к преобразованию плоскости .dwg» (см. раздел 8.2.2). Поясните автоматизированное построение чертежа.

7.2.6. Алгоритм проецирования на дополнительную плоскость

Сформулируем общий алгоритм замены плоскостей проекций. Пусть задан бесозный чертеж объекта. Необходимо построить проекцию на новую плоскость, заменяющую одну из заданных. Например, это чертеж на рис. 7.5в, в котором заданы проекции на плоскостях Π_1 и Π_2 и выполняется замена плоскость Π_2 на Π_4 .

1. На заданных проекциях задайте ось измерений координат заменяемой проекции (на рис. 7.5б – это ось X_{12}).
2. Задайте новую ось, определяющую положение и измерение координат новой проекции (ось X_{14}).
3. От проекций точек на общей проекции постройте проецирующие прямые, перпендикулярные новой оси (например, от точки отрезок $(A_1-A_{14}) \perp X_{14}$).
4. На новой проекции, на ее проецирующих прямых от новой оси отложите координаты точек, измеренные на заменяемой проекции, и проставьте маркеры новых точек (например, отложите длину $(A_{14}-A_4) = (A_{12}-A_2)$ и поставьте точку A_4).
5. Выполните оформление чертежа: проставьте буквенные обозначения, знаки прямых углов, засечки, поясняющие равенство отрезков линий связи.

Вопросы для самоконтроля

1. Как определить объем, площадь, периметр геометрических объектов?
2. Как измерить угол между двумя плоскостями?
3. Как определить угол между плоской фигурой и одной из координатных плоскостей?

4. Как определить угол между пересекающимися прямыми?
5. Дать определение угла между скрещивающимися прямыми.
6. Как определить угол между скрещивающимися прямыми?
7. Алгоритм построения отрезка кратчайшего расстояния между скрещивающимися прямыми.
8. Как проверить правильность построения отрезка кратчайшего расстояния между скрещивающимися прямыми?
9. Как определить угол между прямой и плоскостью?
10. Определение расстояния между параллельными прямыми.

ГЛАВА 8

Приложение к лекции 4: Метрические задачи

В приложении приведены материалы, дополняющие лекцию 4 (глава 7).

8.1. 3D-модели метрических задач

Приведены алгоритмы построения моделей к рис. 7.1 «Измерение углов между плоскостями».

8.1.1. Измерение двугранного угла (к рис. 7.1а, б)

Приведены параметры и алгоритм построения модели к рис. 7.1а, б. Параметры заданы на чертеже (рис. 8.1).

- ◆ По чертежу определите координаты точек 1, 2, C , D . Например, точка 1 имеет координаты в МСК (0, 17, 17);
- ◆ создайте файл на основе шаблона, перейдите в окно аксонометрии; визуальный стиль «Концептуальный»;
- ◆ постройте отрезки (1, 2), (1, C), (1, D);
- ◆ установите ПСК, направив Z -ось  по точкам 1, 2, и перенесите начало координат  в точку 2 (см. рис. 7.1а);
- ◆ постройте проекции отрезков (1, C) и (1, D) на плоскость XY ПСК (см. раздел 5.2), найдите точки 3, 4 пересечения отрезков со своими проекциями и командой «3D-полилиния»  постройте треугольники (1, 2, 3) и (1, 2, 4). Сформируйте из треугольников области;
- ◆ Оформление \ Размеры \ размер угловой  \ укажите точки 2, 3, 4 \ курсором укажите положение размерной линии.
- ◆ Укажите размер \ в панели «Свойства», в разделе «Текст» задайте «Цвет заливки» «Нет».

Для построения истинного вида угла между плоскостями (см. рис. 7.1б):

- ◆ скопируйте видовой экран модели. Оставьте в новом экране только грани и размер, остальные объекты изолируйте \ скройте или избирательно заморозьте слои с этими объектами;

- ◆ выполните команду «План»;
- ◆ придайте модели наглядность;
- ◆ сохраните файл с именем «Двугранный угол .dwg».

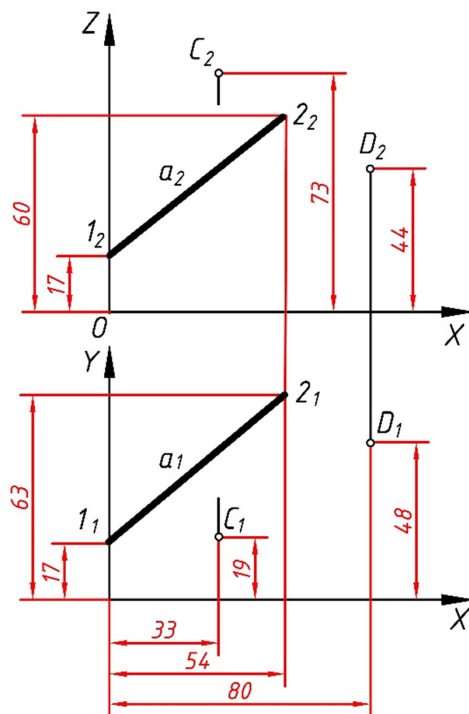


Рис. 8.1. Чертеж модели двугранного угла

8.1.2. Угол между перпендикулярами плоскостей (к рис. 7.1в)

Приведены параметры и алгоритм построения модели к рис. 7.1в. Координаты точек в МСК: $A(53, 62, 9)$, $B(11, 30, 76)$, $C(84, 5, 70)$, $AP = 48$, $AP^* = 61$. Сторона квадратов равна 28.

- ◆ Создайте файл на основе шаблона.
- ◆ Постройте отрезки AB , AC .

Постройте квадраты α и β :

- ◆ ПСК, Направление оси Z \ укажите точки A, B ;
- ◆ ПСК, Начало \ $0,0,48$;
- ◆ прямоугольник по двум точкам  \ Первый угол: $-14, -14$ \ Второй угол: $14, 14$ – построен квадрат α ;
- ◆ повторите построения для квадрата β .

Поставьте размер угла:

- ◆ ПСК, 3 точки \ укажите точки A, C, B ;

- ◆ Оформление \ Размеры \ размер угловой  \ укажите точки A, C, B \ курсором укажите положение размерной линии;
- ◆ снимите цвет заполнения размерного числа (см. выше, раздел 8.1.1);
- ◆ придайте модели наглядность, задав цвет и освещение плоскостей;
- ◆ сохраните файл с именем «Угол между перпендикулярами плоскостей .dwg».

8.1.3. Углы с координатными плоскостями (к рис. 7.1г)

Модель является дополнением к модели, приведенной на рис. 5.14в.

- ◆ Создайте копию файла «Три перпендикулярные плоскости .dwg» (см. раздел 6.8.10), построенного к модели рис. 5.14в. Удалите плоскости β, γ – остались квадрат δ и отрезок перпендикуляра AC .
- ◆ Постройте отрезки AD, AE, AF .

Проставьте угловой размер $\angle(AP, AD)$:

- ◆ Вид \ Координаты \ ПСК «3 точки»  ³ \ укажите точки A, D, P (или C) – ПСК установлена в плоскость угла;
- ◆ Оформление \ Размеры \ размер угловой  или команда \ укажите точки A, D, P \ курсором укажите положение размерной линии.

При перемещении курсором размерной линии измеряемый угол может быть показан как острый или тупой.

- ◆ В панели «Свойства» отредактируйте параметры размера, включая шрифт, размеры стрелок, точность.
- ◆ Тем же алгоритмом проставьте размеры $\angle(AP, AE), \angle(AP, AF)$.
- ◆ Для размера $\angle(m, n)$ постройте проекцию квадрата δ на Π_1 и отрезок k пересечения плоскостей δ и Π_1 . В плоскости отрезков m, n проставьте угловой размер.
- ◆ Сохраните файл с именем «Углы с координатными плоскостями .dwg».

8.1.4. Угол и расстояние между скрещивающимися прямыми (к рис. 7.2)

Приведены параметры и алгоритм построения модели к рис. 7.2. Координаты точек в МСК: точка 1(19, 42, 52); точка 2(75, 3, 67); точка 3(53, 41, 16); точка 4(81, 53, 62).

- ◆ Создайте файл на основе шаблона, МСК;
- ◆ постройте  отрезки a (1, 2) и b (3, 4) (рис. 7.2а).

Определяем угол между заданными прямыми $\angle(a, b)$ (рис. 7.2б):

- ◆ скопируйте  отрезок a из точки 2 в точку 4 – построен отрезок $a'(5, 4)$ и создана плоскость параллелизма $\gamma(a', b) = \gamma(3, 4, 5)$;
- ◆ установите  ПСК в плоскость γ по точкам 3, 4, 5;

- ♦ поставьте угловой размер , указав точки 4, 3, 5, – построен угол $\angle(a', b)$, равный искомому углу $\angle(a, b)$ между заданными скрещивающимися прямыми.

Строим отрезок m кратчайшего расстояния между заданными прямыми a, b (рис. 7.2в, з):

- ♦ командой «Конвертировать в 2D» постройте проекцию отрезка a (1, 2) на плоскость γ , т. е. на XU ПСК, – построен отрезок a'' и определена точка K пересечения отрезков a'' и b ;
- ♦ из точки K с объектной привязкой «Нормаль» опустите  перпендикуляр на отрезок a – построен отрезок m (K, K') являющийся искомым отрезком кратчайшего расстояния;
- ♦ придайте модели наглядность;
- ♦ сохраните файл с именем «Угол и расстояние между скрещивающимися прямыми.dwg».

8.1.5. Углы и расстояние между диагоналями координатных плоскостей

На рис. 8.2 показано решение задачи о построении угла и общего перпендикуляра для отрезков, построенных по угловым точкам шаблона. Диагонали являются скрещивающимися прямыми (рис. 8.2а). Их координаты в МСК: отрезок $a((0, 0, 0)(100, 70, 0))$, отрезок $b(0, 70, 70)(100, 0, 0))$. Алгоритм построения – см. выше, раздел 8.1.4. Построена плоскость параллелизма, и в ней определен угол между диагоналями (рис. 8.2б). Построена проекция отрезка a на плоскость параллелизма, и построен отрезок m (рис. 8.2в). Для проверки решения определены углы отрезка m с отрезками диагоналей (рис. 8.2г), равные 90° . Это подтверждает, что отрезок m является общим перпендикуляром к отрезкам диагоналей.

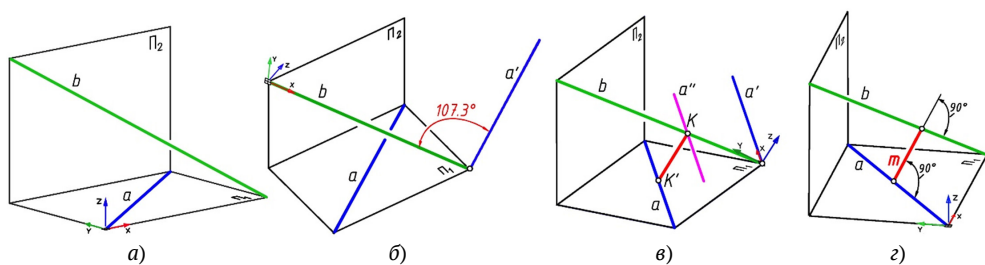


Рис. 8.2. Угол и расстояние между диагоналями координатных плоскостей:
 a – диагонали; b – угол между диагоналями;
 $в$ – отрезок кратчайшего расстояния; $г$ – общий перпендикуляр

8.1.6. Расстояние между поверхностями конуса и сферы (к рис. 7.3)

Кратчайшее расстояние находится в общей плоскости симметрии заданных тел. Эта плоскость одновременно делит конус и сферу на равные части. Плоскость определяется осью конуса и точкой центра сферы.

Алгоритм построения 3D-модели (см. рис. 7.3):

- ◆ создайте файл на основе шаблона, МСК, скройте плоскости Π_2, Π_3 ;
- ◆ перенесите начало координат  в точку (25, 45, 0);
- ◆ 3D-инструменты \ Прямое моделирование \ Конус  \ Центр основания: 0,0 \ Радиус: 20 \ Высота: 50;
- ◆ Сфера  \ Центр: 48,-18,30 \ Радиус: 20 – конус и сфера построены (рис. 7.3а).

Устанавливаем ПСК в плоскость симметрии тел:

- ◆ Вид \ Координаты \ 3 точки  \ Новое начало координат: 0,0 \ Точка на положительном луче оси X : с объектной привязкой «Контоточка» укажите вершину конуса \ Точка на положительном луче оси Y : с объектной привязкой «Центр» укажите центр сферы – плоскость XOY установлена в плоскость симметрии двух тел. Положение ПСК, как на рис. 7.3б.

Поверните ПСК так, чтобы ось X направить по плоскости Π_1 , ось Y – вдоль оси конуса:

- ◆ ПСК \ поворот  вокруг оси Z на -90° \ Поворот  вокруг оси Y на 180° .

Строим сечение тел плоскостью симметрии:

- ◆ 3D-инструменты \ Прямое моделирование \ Сечение  \ Выберите объекты: укажите конус и сферу \ 3 точки \ Первая точка на плоскости: 0,0 \ Вторая точка на плоскости: 1,0 \ Третья точка на плоскости: 0,1 \ – построено сечение тел плоскостью симметрии;
- ◆ укажите конус и сферу \ Изолировать \ Скрыть – в видовом окне остались сечения тел плоскостью симметрии как две области (см. рис. 7.3б);
- ◆ План \ текущая – установлен вид на плоскость XU , т. е. на плоскость сечения (см. рис. 7.3в).

Строим отрезок из центра сферы перпендикулярно образующей конуса:

- ◆ Отрезок \ Первая точка: с привязкой «Центр» укажите центр сферы, точку C \ Вторая точка: с привязкой «Нормаль» укажите образующую конуса – построен отрезок AC . Часть этого отрезка AB является искомым отрезком кратчайшего расстояния между заданными конусом и сферой.

Ставим размер длины отрезка AB . Предварительно следует настроить округление размерных чисел в установленном размерном стиле.

- ◆ Оформление \ Размеры \ по стрелке раскрыть окно «Размерный стиль» \ Изменить \ Основные единицы \ Точность \ задайте требуемую точность, например 0.0 (т. е. до десятых);
- ◆ Разбивка  \ укажите область сечения сферы – сечение преобразовано в окружность;
- ◆ Оформление \ Размеры \ Параллельный  \ с привязками «Контоточка» и «Пересечение» укажите концы отрезка AB – поставлен размер со значением 20.2 мм;

- ◆ придайте модели наглядность;
- ◆ сохраните модель в файле «Расстояние от конуса до сферы.dwg».

8.1.7. Расстояние от тора до цилиндра (к рис. 7.4)

Рассмотрим алгоритм решения метрической задачи построения отрезка кратчайшего расстояния между поверхностями тора и цилиндра (см. рис. 7.4а).

- ◆ Создайте файл на основе шаблона. МСК.
- ◆ Тор  \ Центр: 30,30,25 \ Радиус: 15 \ Радиус полости: 8.

Ось цилиндра как отрезок с конечными точками 1, 2:

- ◆ Отрезок  \ 29.5,59.6,70.5 \ 90.5,33.6,48.5.

Строим цилиндр, а также проекции тора и цилиндра на плоскость основания цилиндра как 2D-виды (рис. 7.4б). Установите ПСК по оси цилиндра (рис. 7.4в):

- ◆ ПСК \ Направление оси Z  \ укажите точку 1 \ Укажите точку 2 – установлена ПСК в плоскость основания цилиндра (см. рис. 7.4в);
- ◆ Цилиндр  \ Центр основания: 0,0 \ Радиус: 10 \ Высота: укажите конечную точку оси – точку 2 – построен цилиндр;
- ◆ 2D Вид  \ Выберите объекты: укажите тор и цилиндр \ Укажите, куда будет вставляться вид: Модель \ укажите произвольную точку плоскости XY – построен «2D Вид», содержащий проекцию тора v1 и проекцию цилиндра v2 на плоскость XY ПСК;
- ◆ переместите  «2D Вид», т. е. его обе части v1, v2, совместив центр окружности, точку 1, с точкой 0,0 ПСК (см. рис. 7.4в);
- ◆ изолируйте «2D вид», скрыв тор и цилиндр, – остался 2D-вид, содержащий проекции v1 и v2 (см. рис. 7.4б).

Строим отрезок (1, 4) из центра окружности по нормали к проекции тора:

- ◆ Отрезок \ 0,0 (точка 1) \ С привязкой «Нормаль» укажите проекцию тора со стороны окружности, дождитесь подтверждения привязки в точке 4 – построен отрезок (1, 4).

Решена часть задачи – определена величина кратчайшего расстояния между тором и цилиндром как длина отрезка (3, 4). Длину можно определить, указав отрезок и применив к нему либо команду «Список», либо панель «Свойства», либо команду «Дистанция».

Определяем положение отрезка кратчайшего расстояния:

- ◆ копируйте  отрезок оси цилиндра из точки 1 в точки 3, 4 – построены отрезки m, n. (см. рис. 7.4в).

Находим точку 5 касания отрезка m с тором. Для этого построим сечение тора плоскостью, заданной точками 1, 2, 4:

- ◆ восстановите скрытые объекты – завершите изоляцию;
- ◆ Сечение  \ Укажите тор \ 3 точки \ с объектной привязкой «Конточка» укажите точки 1, 2, 4 – построено сечение как область s;

- ◆ Разбивка  \ укажите сечение s – область преобразована в сплайн;
- ◆ скопируйте  отрезок (1,4) в точку касания 5, которую определите с привязкой «Пересечение» – построен отрезок (5, 7);
- ◆ поверх отрезка (5, 7) строим отрезок (5, 6), в котором точка 6 определяется привязкой «Пересечение».

Отрезок (5, 6) является искомым отрезком кратчайшего расстояния между поверхностями тора и цилиндра.

Положение моделей не позволяет при их осмотре сделать видимыми обе точки 5 и 6. Например, если видна точка 5, то точка 6 закрыта цилиндром (рис. 7.4в). Для наглядности модели удалим четверть цилиндра (рис. 7.4з). Для этого дважды применим команду «Разрез»:

- ◆ Разрез  \ Выберите объекты: укажите цилиндр \ опция YZ \ Укажите точку на YZ-плоскости: 0,0 \ Выберите сторону, которую необходимо оставить, или: Обе – цилиндр разрезан вдоль своей оси;
- ◆ Разрез \ Выберите объекты: укажите половину цилиндра, ближнюю к тору \ XY \ с объектной привязкой «Конточка» укажите точку одну из точек 5, 6, 7 \ Выберите сторону, которую необходимо оставить, или: 0,0 – удалена ближняя четверть цилиндра, отрезок 5-6 стал полностью видимым;
- ◆ объедините  оставшиеся части цилиндра;

Завершение модели:

- ◆ выделите цветом отрезок (5, 6) как искомый отрезок кратчайшего расстояния;
- ◆ придайте модели наглядность;
- ◆ сохраните файл с именем «Расстояние от тора до цилиндра .dwg».

8.1.8. Преобразование прямой общего положения в прямую уровня (к рис. 7.5)

Рассмотрим последовательность построения 3D-модели, приведенной на рис. 7.5. Координаты точек 3D-модели в МСК: $A(22.5, 4.7, 20)$; $B(69.8, 50.3, 51.1)$.

Построение 3D-модели (рис. 7.5а, б):

- ◆ создайте файл на основе шаблона, МСК;
- ◆ по координатам точек постройте отрезок AB . Командой «Конвертирование в 2D» постройте проекции отрезка на Π_1 и Π_2 . Постройте отрезки проекционной связи AA_1 , AA_2 и др.;
- ◆ скопируйте отрезок проекции A_1B_1 , задав перемещение из точки B_1 в точку (100, 33.8, 0), координаты в МСК. Удлините построенный отрезок – получена ось X_{14} ;
- ◆ установите ПСК, задав ось X конечными точками оси X_{14} , и направив ось Y вертикально вверх;
- ◆ в плоскости XY ПСК постройте прямоугольник, задав его две противоположные точки 0,0 и 90,64. Преобразуйте прямоугольник в область – построенная плоскость Π_4 ;

- ◆ командой «Конвертирование в 2D» постройте проекцию отрезка AB на плоскость Π_4 , отрезок A_4B_4 , и отрезки проекционной связи A_1A_{14} , B_1B_{14} , $A_{14}A_4$ и $B_{14}B_4$;
- ◆ установите ПСК, направив ось Z вдоль отрезка оси X_{14} ;
- ◆ поверните плоскость Π_4 вместе с проекцией A_4B_4 и отрезками проекционной связи $A_{14}A_4$ и $B_{14}B_4$ вокруг точки $O, 0$ в режиме копирования на 90° – получено положение плоскости Π_4 вместе с проекцией и отрезками проекционной связи при их совмещении с плоскостью Π_1 ;
- ◆ для наглядности можно построить круговой массив плоскостей Π_4 . Для этого рационально из объектов вращения создать блок;
- ◆ повторите вращение для плоскости Π_2 , совместив ее с плоскостью Π_1 ;
- ◆ придайте 3D-модели наглядность и сохраните файл с именем «Преобразование прямой общего положения в прямую уровня .dwg».

Построение чертежа (рис. 7.5б), выполненного в автоматическом режиме, приведено в разделе 8.2.1.

8.1.9. Преобразование прямой уровня в проецирующую прямую (к рис. 7.7)

Рассмотрим построение модели, приведенной на рис. 7.7. За основу возьмем построения 3D-модели к рис. 7.5 (см. выше раздел 8.1.8) и добавим к ней построение плоскости Π_5 :

- ◆ создайте новый файл на основе шаблона и из файла «Преобразование прямой общего положения в прямую уровня .dwg» скопируйте построения, выполненные для прямой уровня;
- ◆ ПСК, Направление оси Z \ Укажите новую начальную точку: укажите точку B \ Точка на положительном луче оси Z : укажите точку A ;
- ◆ ПСК, Начало \ Укажите начало ПСК: $0, 0, -22$ – ПСК смещена вдоль отрезка AB и установлена для создания плоскости Π_5 ;
- ◆ Главная \ Черчение \ Прямоугольник по 2 точкам \ Первый угол: $-22, -24$ \ Второй угол: $33, 30$ – построен контур плоскости Π_5 ;
- ◆ преобразуйте контур плоскости Π_5 в объект «Область»;
- ◆ постройте отрезки проецирующих прямых A_5A_{45} и $A_{45}B_4$;
- ◆ установите ПСК, направив ось Z вдоль отрезка оси X_{14} ;
- ◆ выполните поворот  в режиме копирования плоскостей Π_4 , Π_5 вместе с содержащимися в них проекциями до совмещения с Π_1 ;
- ◆ установите ПСК, направив ось Z вдоль отрезка оси X_{45} ;
- ◆ поверните  плоскость Π_5 в режиме копирования до совмещения с плоскостью Π_1 ;
- ◆ придайте модели наглядность и сохраните файл с именем «Преобразование прямой уровня в проецирующую .dwg».

Построение чертежа (см. рис. 7.7б), выполненного в автоматическом режиме, приведено в разделе 8.2.1.

8.1.10. Преобразование плоскости общего положения в плоскость уровня (к рис. 7.8)

Рассмотрим построение модели, приведенной на рис. 7.8. Координаты точек в МСК: $A(26, 50, 52)$, $B(58, 7.6, 68)$, $C(72, 39, 12.4)$.

Построим 3D-модель треугольника (рис. 7.8a):

- ◆ создайте файл на основе шаблона;
- ◆ отрезками прямых  постройте треугольник (ABC) по приведенным координатам его вершин и преобразуйте треугольник в область;
- ◆ из вершины A постройте горизонталь h в плоскости треугольника (см. раздел 5.6, и раздел 6.5.1);
- ◆ постройте проекции треугольника и горизонтالي на Π_1 и Π_2 , отрезки проекционной связи – получена модель треугольника в начальном положении (см. рис. 7.8a).

«Отодвинем» треугольник от плоскости Π_2 :

- ◆ Перемещение  \ Выбор объектов: укажите треугольник (ABC), отрезок горизонтали h , их горизонтальные проекции и проецирующие отрезки \ Базовая точка: укажите произвольную точку на плоскости XY \ Укажите вторую точку: в режиме «ОРТО» переместите курсором объекты вдоль оси Y и задайте с клавиатуры перемещение 75 – объекты установлены как на рис. 7.8б.

Строим плоскость Π_4 :

- ◆ ПСК, Направление оси Z  \ Укажите начальную точку: с привязкой «Пересечение» укажите точку $K (h \cap BC)$ (см. рис. 7.6б) \ Точка на положительном луче оси Z : укажите точку A ;
- ◆ ПСК, Начало  \ Укажите начало ПСК: $0, 0, -36.5$ – это точка A_4 ;
- ◆ постройте прямоугольник  по угловым точкам $(32, -52)$ и $(-98, 61)$ и преобразуйте его в область  – построена плоскость Π_4 ;
- ◆ командой «Конвертирование в 2D» постройте проекцию отрезка BC на плоскость Π_4 – построен отрезок C_4B_4 .

Строим плоскость Π_5 :

- ◆ ПСК, 3 точки  \ Новое начало координат: Укажите точку C_4 \ Укажите точку по оси X : укажите точку B_4 \ Укажите точку с положительной Y координатой: укажите точку C ;
- ◆ ПСК, Начало  \ Укажите начало ПСК: укажите точку $(0, 0, -77)$ – ПСК установлена в точку C_{45} , плоскость XY параллельна плоскости треугольника ABC ;
- ◆ постройте прямоугольник  по угловым точкам $(0, 0)$ и $(70, 91)$ и преобразуйте его в область – построена плоскость Π_5 ;
- ◆ командой «Конвертирование в 2D» постройте проекцию треугольника ABC и отрезка горизонтали h на плоскость Π_5 .

Совмещение плоскостей $\Pi_2 \dots \Pi_5$ с плоскостью Π_1 :

- ◆ установите ПСК, направив Z -ось по конечным точкам оси X_{14} ;

- ◆ Главная \ Редактирование \ Поворот  \ Выбор объектов: применяя выбор рамкой, выберите все объекты в плоскостях Π_4 и Π_5 \ Базовая точка: 0,0 \ Копия \ Угол поворота: 90° ;
- ◆ установите ПСК, направив Z-ось по конечным точкам оси X_{45} ;
- ◆ поверните плоскость Π_5 вместе с проекцией треугольника $(A_5B_5C_5)$ и горизонтали h_5 в режиме копирования на 90° ;
- ◆ придайте модели наглядность, задав цвет объектам, и настройте источники света;
- ◆ сохраните файл с именем «Преобразование плоскости в плоскость уровня .dwg».

8.2. Автоматическое построение чертежа в метрических задачах. Алгоритм начертательной геометрии

В начертательной геометрии решение метрических задач выполняют на чертеже, который строят вручную на бумаге или на компьютере в режиме 2D, применяя алгоритмы, приведенные в разделе 7.2. Возможности Платформы nanoCAD позволяют автоматизировать реализацию этих алгоритмов, применяя к предварительно созданной 3D-модели команды группы «2D-виды». Рассмотрим три примера. В первых двух чертежи построены в автоматическом режиме. В третьем – по традиционной методике.

8.2.1. Чертеж к преобразованию прямой общего положения в проецирующую прямую

В качестве примера автоматизации покажем построение чертежа, приведенного на рис. 7.7б.

Построение 3D-модели приведено выше – см. раздел 8.1.9. Для создания чертежа в автоматическом режиме на основе 3D-модели из модели понадобится лишь сам отрезок и отрезки двух осей X_{12} и X_{14} (рис. 8.3а):

- ◆ создайте файл на основе шаблона;
- ◆ из файла 3D-модели «Преобразование прямой общего положения в проецирующую прямую .dwg» скопируйте через буфер обмена отрезок AB и отрезки осей X_{12} и X_{14} . Из остальных объектов только для наглядности можно взять проекцию отрезка на Π_1 .

Для построения 2D-видов 3D-модель должна состоять из объектов «Область» или «Поверхность» (см. раздел 6.2). В данном примере нужно из отрезков AB , X_{12} , X_{14} создать тонкие полоски поверхностей, толщиной 0.001:

- ◆ убедитесь, что в видовом экране установлена МСК;
- ◆ 3D-инструменты \ Выдавливание  \ укажите три отрезка AB , X_{12} , X_{14} \ Величина выдавливания: 0.001.

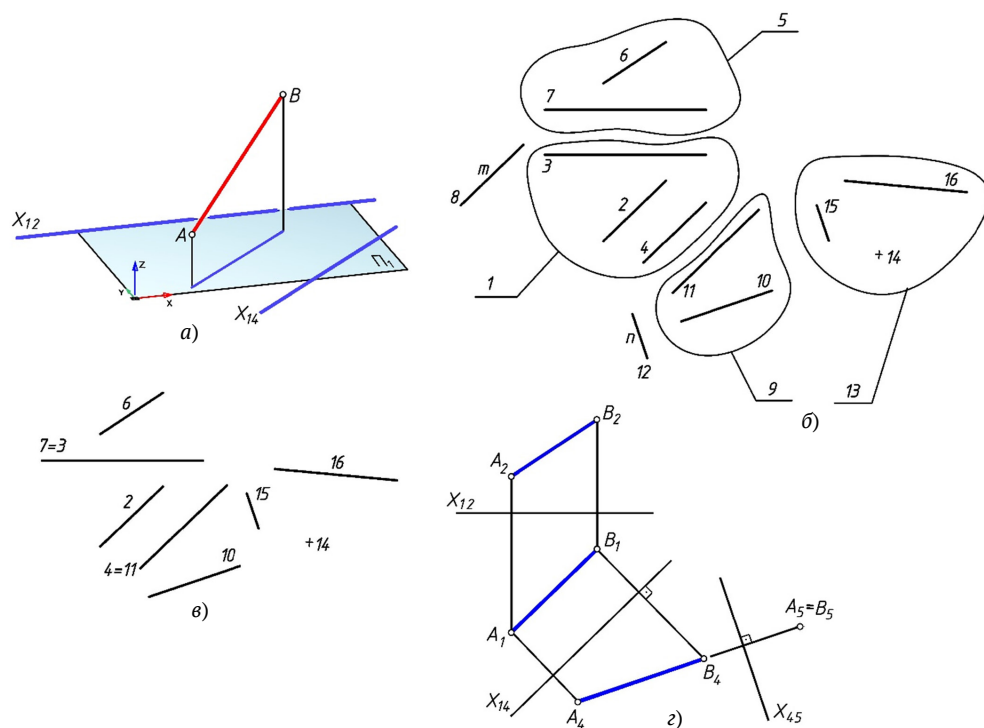


Рис. 8.3. Автоматизированное построение чертежа преобразования прямой общего положения в проецирующую прямую:
 а – 3D-модель; б – 2D-виды проекций; в – объединение 2D-видов; г – чертеж

Командой «2D Вид» строим горизонтальную и фронтальную проекции с выносом их на Лист:

- ◆ 3D-инструменты \ 2D-виды \ 2D Вид \ Выберите объекты: на 3D-модели укажите поверхности, созданные из отрезков AB, X_{12}, X_{14} \ Укажите Лист, куда будет вставляться вид: укажите опцию A3 – произошел автоматический выход на Лист, за курсором перемещается горизонтальные проекции отрезков \ укажите положение горизонтальной проекции как произвольную точку на Листе – построена горизонтальная проекция модели (поз. 1, рис. 8.3б) \ потяните курсор вверх – построена фронтальная проекция модели (поз. 5).

Горизонтальная проекция (поз. 1) содержит проекцию отрезка AB (поз. 2), проекцию оси X_{12} (поз. 3) и оси X_{14} (поз. 4). Фронтальная проекция (поз. 5) содержит проекцию отрезка AB (поз. 6) и отрезок 7, являющийся совмещенными проекциями осей X_{12} и X_{14} .

Построим проекцию модели на плоскость Π_4 . Для этого применим команду «2D разрез». Особенность применения команды в том, что плоскость разреза следует задать условно, расположив ее перед объектом. При этом вместо разреза получается изображение, являющееся проекцией модели в направлении, перпендикулярном условной плоскости разреза. Плоскость разреза зададим отрезком m , расположенным параллельно горизонтальной проекции оси X_{14} :

- ◆ постройте отрезок m  поверх горизонтальной проекции оси X_{14} (поз. 4);
- ◆ переместите отрезок m , расположив его в произвольной точке перед горизонтальной проекцией (поз. 8);
- ◆ 3D-инструменты \ 2D-виды \ 2D разрез  \ Выберите проекцию: укажите произвольную точку горизонтальной проекции, например точку отрезка 2 \ Выберите первую точку: укажите одну из конечных точек отрезка m \ Выберите вторую точку: укажите вторую конечную точку отрезка m \ Укажите положение вида разреза: переместите курсор и в произвольной точке укажите положение новой проекции – построена проекция модели на плоскость Π_4 (поз. 9).

Проекция на плоскость Π_4 содержит проекцию отрезка AB (поз. 10) и отрезок 11, являющийся проекцией осей X_{12} и X_{14} .

Построим проекцию модели на плоскость Π_5 , перпендикулярную отрезку AB . Применяем команду «2D разрез», задав для нее условную плоскость разреза – отрезок n :

- ◆ постройте отрезок n (поз. 12), перпендикулярный отрезку 10 и расположите его в произвольной точке перед отрезком 10;
- ◆ 2D-виды \ 2D разрез  \ Выберите проекцию: укажите в произвольной точке проекцию на плоскость Π_4 (поз. 9) \ Выберите первую точку: укажите конечную точку отрезка n \ Выберите вторую точку: укажите вторую конечную точку отрезка n \ Укажите положение вида разреза: переместите курсор – тянется новая проекция модели. В произвольной точке укажите положение новой проекции – построена проекция модели (поз. 13) на плоскость Π_5 .

Проекция на плоскость Π_5 (поз. 13) содержит искомую проекцию отрезка AB в виде точки 14, а также проекции оси X_{45} (поз. 15) и оси X_{14} (поз. 16).

Построенную проекцию точки 14 необходимо визуализировать:

- ◆ Укажите проекцию на Π_5 (поз. 13) в ее произвольной точке – выделена искомая точка 14;
- ◆ Построение \ Черчение \ Точка  \ с объектной привязкой «Контотчка» укажите точку 14 – проставлен маркер «крестик», настроенный в шаблоне.

Получена заготовка чертежа как набор 2D-видов. Для оформления чертежа необходимо переместить 2D-виды для совмещения одноименных проекций осей X_{12} , X_{45} . При перемещении 2D-видов между ними автоматически поддерживается проекционная связь:

- ◆ переместите фронтальную проекцию (поз. 5), совместив отрезки осей в точках 7 и 3 (рис. 8.3в);
- ◆ переместите проекцию на Π_4 (поз. 9), совместив точку 11 с точкой 4.

Для доработки чертежа необходимо удалить связь 2D-видов с 3D-моделью и разбить их на элементы:

- ◆ Разбивка  \ рамкой охватите все 2D-виды – 2D-виды расчленены на отрезки;
- ◆ удалите вспомогательные отрезки m , n и отрезок 11;

- ◆ придайте линиям необходимую толщину, цвет, нанесите буквенные обозначения (рис. 8.3г).

Законченный чертеж приведен на рис. 7.7б.

- ◆ Сохраните файл с именем «Чертеж к преобразованию прямой .dwg».

8.2.2. Чертеж к преобразованию плоскости общего положения в плоскость уровня (к рис. 7.8)

В качестве второго примера автоматизации рассмотрим построение чертежа к задаче определения истинного вида треугольника ABC (см. рис. 7.8в). Алгоритм автоматизации во многом повторяет рассмотренный выше алгоритм (см. раздел 8.2.1), поэтому ограничимся кратким изложением.

Построение 3D-модели приведено в разделе 8.1.10. Для создания чертежа из 3D-модели понадобится треугольник с отрезком горизонтали и отрезки двух осей X_{12} и X_{14} (рис. 8.4а):

- ◆ создайте новый файл на основе шаблона;
- ◆ из файла 3D-модели «Преобразование плоскости в плоскость уровня .dwg» скопируйте через буфер памяти треугольник ABC , отрезки горизонтали h и осей X_{12} и X_{14} ;

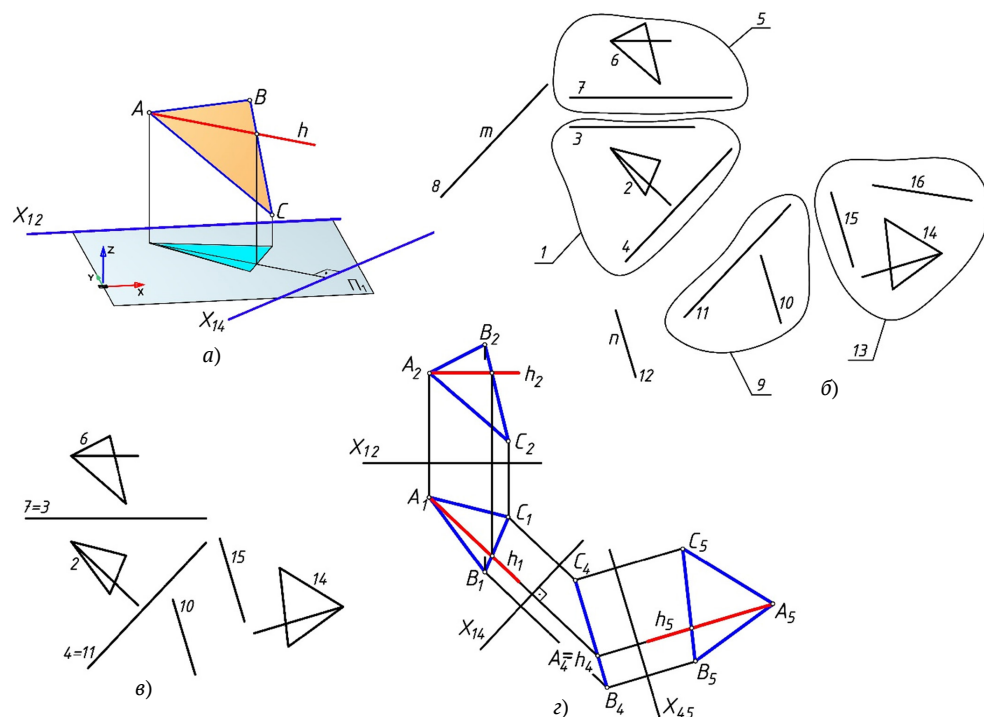


Рис. 8.4. Автоматизированное построение чертежа преобразования плоскости общего положения в плоскость уровня:
а – 3D-модель; б – 2D-виды проекций; в – объединение 2D-видов; г – чертеж

- ◆ убедитесь, что установлена МСК и треугольник ABC является объектом «Область». Создайте из отрезков горизонтали и двух осей полосы поверхностей, применив к ним команду «Выдавливание» с величиной выдавливания 0.001;
- ◆ командой «2D Вид»  постройте горизонтальную и фронтальную проекции с выносом их на Лист.

Горизонтальная проекция (поз. 1, рис. 8.4б) содержит проекцию треугольника ABC (поз. 2), проекцию оси X_{12} (поз. 3) и оси X_{14} (поз. 4). Фронтальная проекция (поз. 5) содержит проекцию треугольника (поз. 6) и отрезок 7, являющийся проекцией осей X_{12} и X_{14} .

Командой «2D разрез» строим проекцию модели на плоскость Π_4 , определяемую осью X_{14} :

- ◆ постройте проекцию условной плоскости разреза – отрезок m (поз. 8, рис. 8.4б). Первоначально постройте его поверх горизонтальной проекции оси X_{14} (поз. 4), затем переместите его, расположив в произвольной точке перед горизонтальной проекцией;
- ◆ 2D разрез  \ укажите произвольную точку горизонтальной проекции \ укажите конечные точки отрезка m \ переместите курсор и в произвольной точке укажите положение новой проекции – построена проекция модели (поз. 9) на плоскость Π_4 , содержащая проекцию треугольника в виде отрезка 10 и отрезок 11, в который спроецированы оси X_{12} и X_{14} .

Строим проекцию модели на плоскость Π_5 , параллельную плоскости треугольника, т. е. отрезку 10. Применяем команду «2D разрез», задав для нее условную плоскость разреза – отрезок n :

- ◆ постройте отрезок n поверх проекции треугольника, указав две конечные точки отрезка 10;
- ◆ переместите отрезок n , расположив его в произвольной точке перед проекцией треугольника (поз. 12);
- ◆ 2D разрез  \ укажите в произвольной точке проекцию на плоскость Π_4 (поз. 9) \ укажите конечные точки отрезка n \ переместите курсор и укажите положение новой проекции – построена проекция модели (поз. 13) на плоскость Π_5 .

Проекция на плоскость Π_5 (поз. 13) содержит истинный вид треугольника ABC (поз. 14), а также проекции оси X_{45} (поз. 15) и проекцию оси X_{14} (поз. 16).

Переместите 2D-виды до совмещения одноименных проекций осей X_{12} , X_{45} (рис. 8.4в):

- ◆ переместите проекцию (поз. 5), совместив отрезки 7 и 3;
- ◆ переместите проекцию (поз. 9), совместив точку 11 с точкой 4.

Для доработки чертежа:

- ◆ Разбивка  \ рамкой охватите все 2D-виды – 2D-виды расчленены на отрезки;
- ◆ удалите вспомогательные отрезки m , n и отрезок 16;

- ◆ придайте линиям необходимую толщину, цвет, нанесите буквенные обозначения (рис. 8.4з).

Законченный чертеж приведен на рис. 7.8в.

- ◆ Сохраните файл с именем «Чертеж к преобразованию плоскости .dwg».

8.2.3. Чертеж к задаче определения расстояния и угла между скрещивающимися прямыми

В разделе 7.1.3 приведено решение метрической задачи о расстоянии и величине угла между скрещивающимися прямыми. Приведена 3D-реализация исторического (предложенного Гаспаром Монжем в 1799 г.) алгоритма ее решения. Эта задача является обязательной в традиционном курсе начертательной геометрии. Поэтому для сравнения приведем ее решение тем же алгоритмом, но методами начертательной геометрии, т. е. на проекционном чертеже. Чтобы показать трудоемкость и сложность традиционного решения, приведем его без рассмотренной выше автоматизации построения чертежа.

Даны скрещивающиеся прямые a и b . 3D-модель этих прямых приведена на рис. 7.2а, ее построение – в разделе 8.1.4. На чертеже (рис. 8.5а) эти прямые заданы своими горизонтальными и фронтальными проекциями. Требуется на проекционном чертеже построить отрезок кратчайшего расстояния между прямыми a и b и определить угол между прямыми.

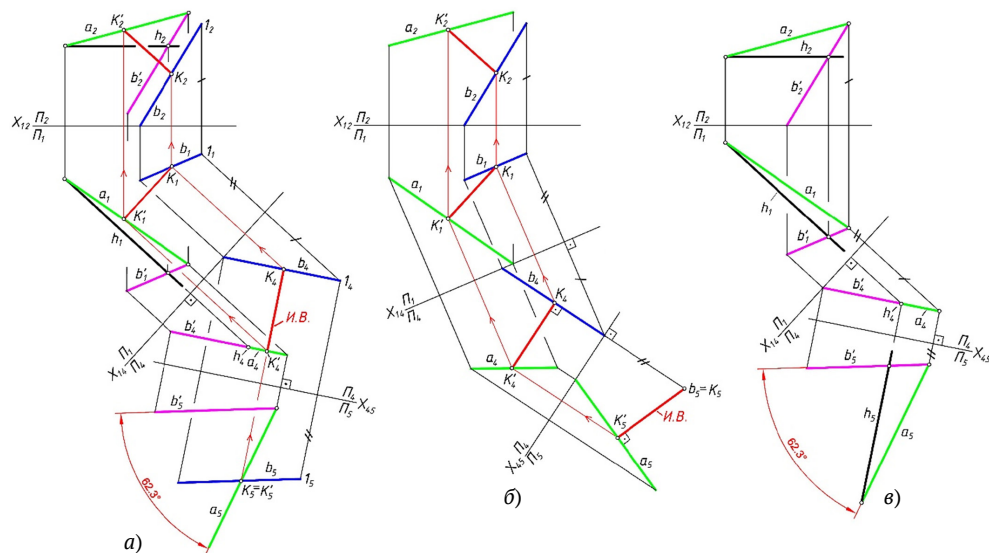


Рис. 8.5. Чертежи к решению задачи о расстоянии и величине угла между скрещивающимися прямыми: а – полный алгоритм; б – преобразование одной из прямых в проецирующую; в – истинный вид плоскости параллелизма

Создаем плоскость параллелизма $\varphi (a \cap b')$. Для этого введем прямую $b' \parallel b$, проходящую через конечную точку прямой a . Поскольку одноименные проекции

параллельных прямых взаимно параллельны, то при построении выполним $b'_1 \parallel b_1$ и $b'_2 \parallel b_2$.

Введем ось X_{12} . Ее положение можно задать произвольно, на чертеже она задана через нижнюю точку отрезка b .

Вводим дополнительную плоскость Π_4 . Вводим ее так, чтобы плоскость φ на нее отобразилась в виде прямой, т. е. реализуем алгоритм преобразования плоскости общего положения в проецирующую плоскость (см. раздел 7.2.5). Для этого в плоскости φ строим горизонталь h , задав ее проекции h_2, h_1 . Положение плоскости Π_4 задаем осью $X_{14} \perp h_1$.

Строим проекцию плоскости отрезков a, b, b', h на Π_4 . От конечных точек горизонтальных проекций этих отрезков проводим проецирующие прямые, перпендикулярно оси X_{14} . Расстояния от оси X_{12} до конечных точек фронтальных проекций прямых этих отрезков откладываем на проецирующих отрезках от оси X_{14} . На чертеже это показано на примере верхней конечной точки отрезка b : равные по длине отрезки отмечены одинаковыми засечками. Например, расстояние от точки 1_2 до оси X_{12} равно расстоянию от точки 1_4 до оси X_{14} . Получены проекции a_4, b_4, b'_4, h_4 . Видим, что эти отрезки образуют единый отрезок на плоскости Π_4 , т. е. плоскость φ отображена в прямую линию. Горизонталь h отображена в точку h_4 . Проекция b_4 параллельна a_4, b'_4 , т. е. параллельна плоскости φ .

Вводим еще одну дополнительную плоскость – Π_5 , параллельную φ . Для этого проводим ось X_{45} параллельно a_4b_4 , на произвольном расстоянии от этих отрезков.

Строим проекции отрезков a_5, b_5, b'_5 на Π_5 . Для этого из конечных точек a_4, b_4, b'_4 проводим проецирующие прямые, перпендикулярные оси X_{45} , и на них от этой оси откладываем расстояния, измеренные от проекций конечных точек a_1, b_1, b'_1 до оси X_{14} . Например, расстояние от точки 1_1 до оси X_{14} равно расстоянию от точки 1_5 до оси X_{45} . Поскольку Π_5 параллельна плоскости φ , то угол $\angle(a_5, b'_5)$ является истинным и равен искомому углу $\angle(a, b)$ между заданными отрезками скрещивающихся прямых.

Искомый отрезок кратчайшего расстояния обозначим KK' . Он определяется по точкам пересечения проекций a_5 и b_5 . Он также перпендикулярен плоскости Π_5 и на ней отображен в виде конкурирующих точек $K_5 = K'_5$. Обратными построениями (на чертеже их выполним красным цветом и поясним стрелками) найдем проекции этого отрезка на остальных плоскостях проекций. Поскольку $KK' \perp \Pi_5$, то $KK' \parallel \Pi_4$ и проекция $K_4K'_4$ отображает истинную величину (ИВ) этого отрезка, т. е. кратчайшее расстояние между прямыми a, b .

Дальнейшим обратным построением (по красным стрелкам) определяем горизонтальную и фронтальную проекции искомого отрезка, т. е. его пространственное положение. Задача решена.

В курсе начертательной геометрии рассмотренный чертеж (рис. 8.5а), ввиду большого количества построений, разбивают на две части. Для определения отрезка кратчайшего можно выбрать одну из заданных прямых и выполнить преобразование чертежа с заменой двух плоскостей проекций, в результате которого отрезок из общего положения становится проецирующим, т. е. ото-

бражается в точку. 3D-модель этого преобразования рассмотрена в разделе 7.2.4, рис. 7.7. Искомый отрезок определяется как перпендикуляр из этой точки на проекцию второго отрезка. На рис. 8.5б для преобразования выбран отрезок b , на плоскости Π_5 он отображен в виде точки b_5 . Истинная проекция отрезка кратчайшего расстояния KK' определена как перпендикуляр $K_5K'_5$ из b_5 на проекцию второй прямой a_5 . Обратным построением найдены горизонтальная и фронтальная проекции искомого отрезка.

Для определения угла между отрезками скрещивающихся прямых выполняется преобразование плоскости параллелизма из плоскости общего положения в плоскость уровня. 3D-модель этого преобразования приведена в разделе 7.2.5 на рис. 7.8. В плоскости уровня угол между отрезками отображается в истинном виде. На рис. 8.5в плоскость $(a \cap b')$ на дополнительной плоскости Π_5 отображена истинном виде, что позволяет измерить искомую величину угла $\angle(a, b)$.

ГЛАВА 9

Комплексные задачи (лекция 5)

Комплексные задачи (КЗ) – это «задачи, при решении которых используются знания разных разделов предметной области». Это общее определение. В этой лекции рассмотрим задачи, которые обобщают весь материал, пройденный в предыдущих лекциях. Понадобится и владение методами 3D-построений, и знание методов проецирования, построения линий пересечения, определения метрических параметров объектов, но главное – понадобится логическое мышление по составлению и исследованию алгоритмов решения, а также умение доказать правильность полученного решения. Согласно направленности курса основное внимание уделим 3D-методам решения задач в Платформе nanoCAD, но для сравнения в приложении рассмотрим решение тех же задач методами начертательной геометрии.

9.1. Об истории и роли комплексных задач

В начертательной геометрии *комплексными называют задачи, в которых искомый элемент должен удовлетворять нескольким геометрическим условиям*. Условиями являются принадлежности к геометрическим множествам, для которых принято название «геометрические места».

Геометрическое место (ГМ) – термин в математике, применяемый для обозначения множества геометрических элементов, обладающих некоторым общим геометрическим свойством. Поэтому КЗ называют также задачами на геометрические места. В процессе решения выявляются геометрические множества (геометрические места), которым принадлежит искомый элемент, а ответом задачи является общий элемент этих множеств.

Комплексные задачи были уже в основополагающей работе Гаспара Монжа [6, стр. 78]. Например, это задача о построении плоскости, расположенной на заданных расстояниях от трех заданных точек (мы рассмотрим эту задачу в разделе 9.7.1). В России комплексные задачи активно включили в преподавание курса начертательной геометрии [7].

В начертательной геометрии КЗ развивают логическое мышление и закрепляют технику работы с проекционным чертежом. Это послужило причиной при-

менения КЗ в учебном процессе кафедр графики. Импульс внедрению КЗ в курс начертательной геометрии был дан в работах Львовского университета. Например, в работе [8] приведены и систематизированы 500 задач и показана методика их решения. КЗ стали применять во многих вузах, в том числе в ЮУрГУ, где КЗ активно включили в учебный процесс, в учебные пособия, рабочие тетради и олимпиады [9, 10].

К сожалению, сегодня КЗ на кафедрах графики вузов РФ практически исчезли из рабочих программ по начертательной геометрии. Причин несколько. Одной из них называют сложность решения этих задач. Действительно, решение КЗ даже средней сложности на проекционном чертеже, т. е. методами начертательной геометрии, требует громоздких построений, за которыми пропадает красота задачи и студенческий интерес к ней (см. примеры, приведенные в главе 10). Это особенно видно на фоне современных возможностей 3D-компьютерной графики и 3D-моделирования. В сравнении с 2D-методами решения методами 3D получаются наглядными, технически более простыми и – при желании – красивыми, хотя и требуют владения компьютерными методами 3D-моделирования. Но владение 3D-методами и компьютерными технологиями является для студентов дополнительным положительным стимулом.

В нашем курсе комплексным задачам уделено большое внимание. Эффективность 3D-методов, на которых основан подход к обучению, позволяет существенно упростить решение тех задач, которые ранее в начертательной геометрии считались сложными. Благодаря этому появляется возможность «поднять планку» – предлагать более содержательные и нестандартные задания, оставаясь при этом в пределах допустимой учебной нагрузки. Такие задачи требуют от студентов не только технических навыков, но и активного включения мышления, что способствует более глубокому освоению материала.

Раздел комплексных задач подводит итог первой части курса, поскольку для их успешного решения необходимо знание всех основных тем, изученных ранее. В нашем курсе комплексные задачи в виде контрольных работ являются формой текущего контроля знаний и отчетности по курсу.

Рассмотрим примеры характерных для нашего курса КЗ и их решение 3D-методами. С целью сравнения приведем решение методами начертательной геометрии.

9.2. Примеры геометрических множеств

Из школьного курса стереометрии известно наиболее простое геометрическое множество (ГМ) – геометрическое место точек. *Геометрическое место точек* (ГМТ) – это геометрическая фигура, состоящая из множества точек, обладающих некоторым общим геометрическим свойством. Аналогично определяют понятия «геометрическое место прямых» и «геометрическое место (множество) плоскостей или поверхностей».

Приведем примеры геометрических мест, многие из которых реализованы в задачах нашего курса.

ГМТ на плоскости:

- 1) ГМТ, удаленных на заданное расстояние от заданной точки, – окружность с центром в заданной точке и радиусом, равным заданному расстоянию;
- 2) ГМТ, удаленных от прямой линии на заданное расстояние, – две прямые, параллельные заданной, построенные на заданном расстоянии по обе стороны от заданной;
- 3) ГМТ, равноудаленных от двух заданных точек, – перпендикуляр к середине отрезка, соединяющего эти точки, – «срединный перпендикуляр»;
- 4) ГМТ, равноудаленных от некоторой точки и прямой, – парабола с заданной директрисой и точкой фокуса.

ГМТ в 3D-пространстве:

- 5) ГМТ, удаленных на заданное расстояние от заданной точки, – сфера с радиусом, равным заданному расстоянию;
- 6) ГМТ, удаленных на заданное расстояние от заданной прямой, – цилиндр, радиус которого равен заданному расстоянию;
- 7) ГМТ, равноудаленных от двух заданных точек, – плоскость, перпендикулярная отрезку, соединяющему эти точки, проходящая через его середину;
- 8) ГМТ, равноудаленных от трех заданных точек, – перпендикуляр, восстановленный к плоскости этих точек из центра окружности, описанной вокруг точек;
- 9) ГМТ, имеющих общую заданную проекцию на заданной плоскости, – перпендикуляр, восстановленный к плоскости из заданной проекции, т. е. проектирующая прямая относительно этой плоскости.
- 10) ГМТ, принадлежащих двум заданным плоскостям, – линия их пересечения;
- 11) ГМТ, удаленных на заданное расстояние от заданной плоскости, – две плоскости, параллельные заданной, находящиеся на заданном расстоянии и по обе стороны от нее;
- 12) ГМТ, равноудаленных от некоторой точки и плоскости, – параболоид вращения;
- 13) ГМТ, равноудаленных от четырех заданных точек, – вершина трехгранного угла, образованного плоскостями, равноудаленными от трех пар точек, произвольно выбранных из заданных четырех точек. Эта точка является центром поверхности сферы, содержащей заданные четыре точки.

Примеры ГМ прямых:

- 14) ГМ прямых, проходящих через заданную точку и пересекающих заданную прямую, – плоскость, заданная этими точкой и прямой;
- 15) ГМ прямых, проходящих через заданную точку и параллельных заданной плоскости, – плоскость, параллельная заданной плоскости и проходящая через заданную точку;
- 16) ГМ прямых, равнонаклоненных к двум плоскостям, – биссекторная плоскость двугранного угла, образованного заданными плоскостями;
- 17) ГМ прямых, проходящих через точку A и составляющих с заданной прямой m угол α – конус вращения с вершиной в точке A , осью m и углом при вершине α ;

- 18) ГМ прямых, проходящих через точку A и расположенных на заданном расстоянии r от заданной точки B , – конус вращения с вершиной в точке A и касательный к сфере, имеющей центр в точке B и радиус r ;
- 19) ГМ прямых, проходящих через точку A и расположенных на расстоянии r от прямой m , – плоскость, проходящая через точку A , касательная к цилиндру радиуса r и осью m ;
- 20) ГМ прямых, расположенных на расстоянии r от прямой m и составляющих с этой прямой угол α ($\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 90^\circ$), – однополостный гиперболоид вращения с осью m и радиусом горловины, равным r . При $\alpha = 0$ – цилиндр вращения радиусом r , $\alpha = 90^\circ$ – плоскость, перпендикулярная прямой m с круговым отверстием радиуса r ;
- 21) ГМ прямых, пересекающих три скрещивающиеся прямые: если прямые не имеют общей плоскости параллелизма, то это однополостный гиперболоид, иначе – гиперболический параболоид.

ГМ плоскостей:

- 22) ГМ плоскостей, расположенных на заданном расстоянии от заданной точки, – плоскости, касательные к поверхности сферы, имеющей радиус, равный заданному расстоянию и центр в заданной точке;
- 23) ГМ плоскостей, составляющих заданный угол с плоскостью и проходящей через заданную точку, – это плоскости, касательные к поверхности конуса, у которого вершина расположена в заданной точке, ось перпендикулярна заданной плоскости и угол при основании равен заданному значению;
- 24) ГМ плоскостей, расположенных на заданном расстоянии от заданной прямой, – это плоскости, касательные к поверхности цилиндра, радиус которого равен заданной величине, а осью является заданная прямая.

Эти примеры можно продолжать бесконечно.

- Лектору: предложите студентам определить геометрическое множество, не включенное в приведенный выше список множеств.

9.3. Схема решения комплексных задач

Решение любой комплексной задачи выполняется в пять этапов.

1. *Анализ* – определение геометрических множеств, которым должен принадлежать искомый элемент.
2. *Исследование* – выявление искомого элемента как общего элемента геометрических множеств и определение существования и количества возможных решений.
3. *Составление алгоритма* как последовательности действий по нахождению решения.
4. *Реализация алгоритма* – построение объектов и выполнение операций над ними.
5. *Проверка или доказательство* правильности полученного решения.

9.4. Комплексные задачи на построение точек

Рассмотрим задачи, в которых проявляются рассмотренные выше ГМТ (см. раздел 9.2). Начнем с простой задачи на применение ГМТ-7 и ГМТ-9. В ней и последующих задачах покажем простые, наглядные и красивые 3D-алгоритмы решения. В главе 10 для сравнения приведем традиционные алгоритмы решения этих задач методами начертательной геометрии.

9.4.1. Точка с заданной проекцией, равноудаленная от двух других точек

Задача 1: построить точку C , равноудаленную от заданных точек A, B и имеющую фронтальную проекцию C_2 (рис. 9.1а).

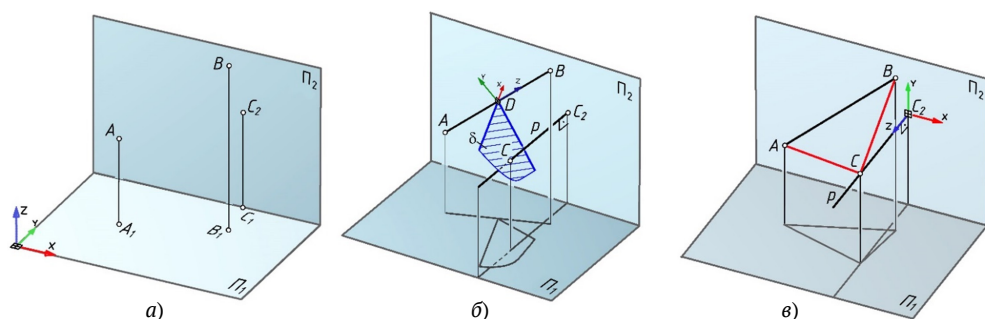


Рис. 9.1. 3D-модель и решение комплексной задачи 1:
а – дано; б – построение; в – проверка решения

Анализ: искомая точка должна удовлетворять двум условиям:

- 1) принадлежать ГМТ, равноудаленным от двух заданных точек. Этим ГМТ является плоскость δ , перпендикулярная отрезку AB , соединяющему заданные точки, и проходящая через его середину, точку D (рис. 9.1б);
- 2) принадлежать ГМТ, имеющим заданную фронтальную проекцию, – этим ГМТ является отрезок фронтально проецирующей прямой p , проходящей через заданную точку C_2 .

Исследование

Искомая точка принадлежит двум ГМТ, следовательно, является их общей точкой, т. е. точкой пересечения плоскости δ и прямой p . Поскольку прямая и плоскость пересекаются в единственной точке, то задача в общем случае имеет решение, причем единственное. Возможно исключение: если отрезок AB параллелен плоскости Π_2 , то решение отсутствует, поскольку прямая p будет параллельна плоскости δ .

Алгоритм решения (рис. 9.1б) воспроизводит две ранее рассмотренные задачи: построение плоскости, перпендикулярной отрезку прямой (см. раздел 5.8.3), и построение точки в плоскости, если для точки задана одна проекция (см. раздел 5.4.1):

- 1) постройте плоскость δ , перпендикулярную отрезку AB в его средней точке;
- 2) восстановите перпендикуляр к плоскости Π_2 из точки C_2 – отрезок p ;
- 3) найдите искомую точку как пересечение отрезка p с плоскостью δ .

Проверка решения

Чтобы убедиться в правильности решения, следует выполнить две проверки:

- 1) убедиться, что найденная точка C имеет своей проекцией на плоскость Π_2 точку C_2 . Для этого установите ПСК на плоскость Π_2 . У точек C и C_2 X, Y -координаты должны быть соответственно равными;
- 2) проверить, что точка C равноудалена от точек A и B . Для этого определите расстояние от точки C до точек A и B . Значения должны быть равны между собой.

Построение 3D-модели приведено в разделе 10.1. Там же для сравнения показано решение задачи на проекционном чертеже, т. е. алгоритмом начертательной геометрии.

- Лектору: откройте файл «Комплексная 1 .dwg» (см. раздел 10.1) и поясните решение задачи алгоритмом 3D и на проекционном чертеже.

9.4.2. Точка, равноудаленная от трех точек и на заданном расстоянии от четвертой точки

Задача 2. Построить точку F , равноудаленную от вершин треугольника (ABC) и расположенную на расстоянии r от точки D (рис. 9.2а).

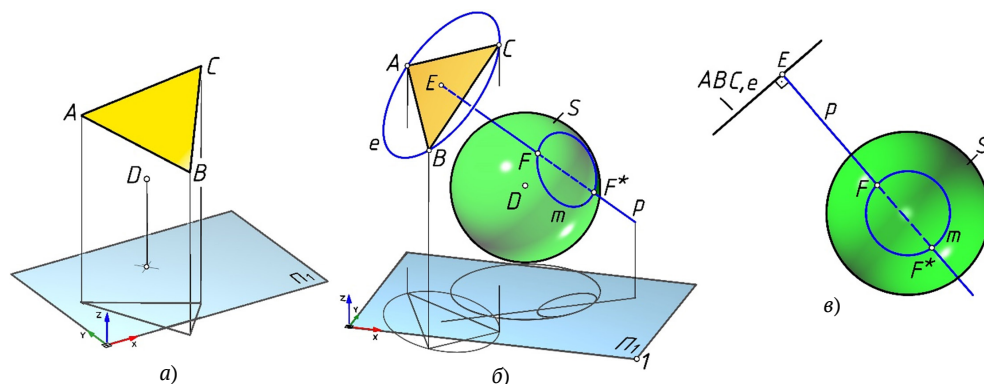


Рис. 9.2. 3D-модель и решение комплексной задачи:
а – дано; б, в – построение

Анализ. Искомая точка должна удовлетворять двум условиям:

- 1) принадлежать ГМТ, равноудаленных от трех вершин треугольника (ABC) . Этим ГМТ является перпендикуляр p к плоскости треугольника, восстановленный из центра окружности, в которую вписан этот треугольник;
- 2) принадлежать ГМТ, расположенных на расстоянии r от точки D . Этим ГМТ является поверхность сферы S радиуса r с центром в точке D .

Исследование

Искомая точка F является общим элементом двух ГМТ: отрезка прямой p и сферы S , следовательно, является точкой их пересечения. В общем случае пересечение прямой линии со сферой происходит в двух точках, т. е. задача имеет два решения. Если прямая касается сферы, то решение единственное. Если пересечения нет, то решение отсутствует.

Алгоритм решения (рис. 9.2б):

- 1) построить окружность e , описанную вокруг треугольника (ABC);
- 2) восстановить перпендикуляр p к плоскости окружности из ее центра – из точки E ;
- 3) построить сферу S радиуса r с центром в точке D ;
- 4) найти искомые точки F и F^* как результат пересечения отрезка p с поверхность сферы. Для этого можно построить сечение сферы плоскостью, заданной конечными точками отрезка p и третьей произвольной точкой, например точкой l (см. рис. 9.2б). Будет построена окружность m . На пересечении отрезка с окружностью m определены искомые точки (рис. 9.2в).

Проверка решения

1. Определите и сравните между собой расстояния от найденной точки F до вершин треугольника (ABC). Расстояния должны быть равными.
2. Определите расстояние от точки F до точки D . Оно должно быть равно заданной величине r .
3. Повторите проверки для точки F^* .

Построение 3D-модели приведено в разделе 10.2. Там же для сравнения показано решение задачи на проекционном чертеже, т. е. алгоритмом начертательной геометрии.

- Лектору: откройте файл «Комплексная 2 .dwg» (см. раздел 10.2) и поясните решение задачи алгоритмом 3D и на проекционном чертеже.

9.4.3. Точка, равноудаленная от двух точек, на заданных расстояниях от третьей точки и от плоскости

Задача 3. Построить точку, равноудаленную от точек A и B , отстоящую от точки C на 50 мм, а от плоскости $\Delta(KLM)$ на расстояние 30 мм.

Эта задача была предложена на олимпиаде в ЮУрГУ [11, с. 23]. Задача считается сложной.

Анализ. Искомая точка должна удовлетворять трем условиям:

- 1) принадлежать ГМТ, равноудаленных от точек A и B . Этим ГМТ (назовем его ГМТ-1) является плоскость α , перпендикулярная отрезку AB , соединяющему заданные точки, и проходящая через его середину (рис. 9.3а);
- 2) принадлежать ГМТ-2, расположенных на расстоянии 50 от точки C . Этим ГМТ является поверхность сферы S радиуса 50 с центром в точке C ;

- 3) принадлежать ГМТ-3, расположенных на расстоянии 30 от плоскости Δ . Этим ГМТ являются плоскости Δ' и Δ'' , параллельные Δ и отстоящие от нее по обе стороны на величину 30.

Исследование. Искомая точка является общим элементом трех множеств ГМТ-1, ГМТ-2, ГМТ-3. Рассмотрим пары этих множеств. Общим элементом ГМТ-1 и ГМТ-2 является сечение сферы S плоскостью α – окружность, назовем ее m . Общим элементом окружности m и ГМТ-3 являются точки пересечения этой окружности с плоскостями Δ' и Δ'' . Каждая плоскость пересекает окружность в двух точках. Для двух плоскостей получаем четыре точки, принадлежащие трем указанным ГМТ. То есть задача имеет в общем случае четыре решения. Особые случаи возникают, если какое-либо из указанных пересечений не реализуется. Например, если плоскость α не пересекает сферу S , то решение отсутствует. В зависимости от взаимного положения сферы S и плоскостей Δ' и Δ'' количество решений возможно от 4 до 0 (нуля), значения 1 и 3 соответствуют касанию одной из плоскостей со сферой.

Возможен второй вариант исследования. Рассмотрим пару ГМТ-1 и ГМТ-3. Их общими элементами являются две прямые линии пересечения плоскости α с плоскостями Δ' и Δ'' , назовем прямые соответственно d и d' . Общим элементом этих прямых с ГМТ-2 являются точки их пересечения со сферой S . Каждая из прямых в общем случае пересекает сферу в двух точках. Вновь получаем, что задача имеет четыре решения. Если обе или одна из прямых не пересекают сферу или касаются ее, то количество решений может быть от 3 до 0.

Алгоритмы решения

Комплексная задача, как правило, имеет несколько алгоритмов (вариантов) решения. Для рассматриваемой задачи приведем три алгоритма. Общая часть алгоритмов:

- ◆ постройте 3D-модели исходных данных (рис. 9.3а): отрезок AB и треугольник KLM ;
- ◆ постройте сферу S (рис. 9.3б). Для наглядности постройте прямоугольник плоскости α . Размеры прямоугольника могут быть как на рис. 9.3а или (рекомендуем) как на рис. 9.3б;
- ◆ постройте плоскости Δ' и Δ'' , для этого скопируйте треугольник Δ перпендикулярно его плоскости на расстояние 30 мм в обе стороны;
- ◆ постройте сечение сферы S плоскостью α . Командой «Разбивка» преобразуйте сечение из объекта «Область» в объект «Окружность» – получена окружность m .

Алгоритм 1 (рис. 9.3б). Алгоритм реализует первый вариант исследования:

- ◆ постройте сечение сферы плоскостями Δ' и Δ'' . Командой «Разбивка» преобразуйте их в объекты «Окружность» – получены сечения окружности соответственно n и g .

Поскольку окружности m , n , g расположены на поверхности общей сферы, то они взаимно пересекаются в точках P , Q , R , T – это четыре искомые точки, являющиеся решением задачи (рис. 9.3в).

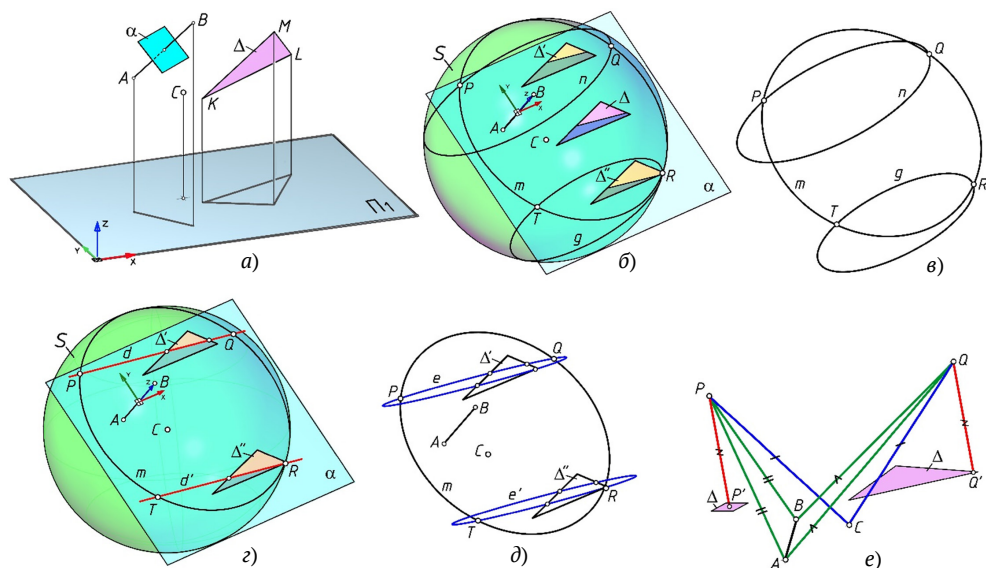


Рис. 9.3. 3D-модель и решение комплексной задачи 3:
 а – дано; б, в – алгоритм 1; г – алгоритм 2; д – алгоритм 3;
 е – проверка решения

Алгоритм 2 (рис. 9.3г) реализует второй вариант исследования:

- ♦ постройте линии пересечения плоскостей треугольников Δ' и Δ'' плоскостью α – получены отрезки двух параллельных прямых d и d' .

Отрезки d и d' и окружность m расположены в плоскости α , поэтому каждый отрезок пересекает окружность в двух точках. Всего образуются четыре точки пересечения P, Q, R, T , являющиеся решением задачи.

Алгоритм 3 (рис. 9.3д).

Как и в первом алгоритме, нужно найти пересечение окружности m с плоскостями Δ' и Δ'' . Для этого следует построить проекцию окружности на плоскости и найти пересечение проекций с окружностью. Для построения проекций применим команду «Конвертирование в 2D». Проекциями окружности являются эллипсы e и e' . Каждый эллипс пересекает окружность в двух точках. В итоге получаем те же четыре точки P, Q, R, T , являющиеся решением задачи.

Проверка решения (рис. 9.3е).

Проверка заключается в определении расстояний от найденных точек до заданных точек A, B, C и расстояния до плоскости Δ . Расстояния можно определять командой «Дист», но для наглядности рекомендуем построить отрезки между точками и определять их длину командой «Список» или в панели «Свойства». Проверку следует выполнить для каждой из четырех найденных точек.

Рассмотрим проверку на примере точки P . Следует:

- 1) проверить равенство отрезков PA и PB ;
- 2) убедиться, что длина отрезка PC равна 50 мм;

- 3) установив ПСК в плоскость треугольника Δ , определить Z -координату проверяемой точки. Можно из точки P опустить перпендикуляр PP' и измерить его длину – значения координаты или длины должны быть равны 30 мм.

Из приведенных трех алгоритмов решения задачи оптимальным для 3D является алгоритм 1 (см. рис. 9.3б, в). Он же является наиболее наглядным. Преимущество алгоритма 2 в том, что он предусматривает построения лишь одной окружности, поэтому рекомендуется для реализации методами начертательной геометрии (см. раздел 10.3).

Построение 3D-моделей алгоритмов приведено в разделе 10.3. Там же для сравнения показано решение задачи на проекционном чертеже, т. е. алгоритмом начертательной геометрии.

- Лектору: откройте файл «Комплексная 3 .dwg» (см. раздел 10.3) и поясните решение задачи алгоритмом 3D и на проекционном чертеже.

9.4.4. Точка на заданном расстоянии от трех скрещивающихся прямых

Задача 4. Построить точку, удаленную на заданное расстояние r от трех скрещивающихся прямых a, b, c .

Пусть скрещивающиеся прямые – это диагональ параллелепипеда и две диагонали его сторон. Параллелепипед задан гранями шаблона (рис. 9.4а). Значение $r = 30$.

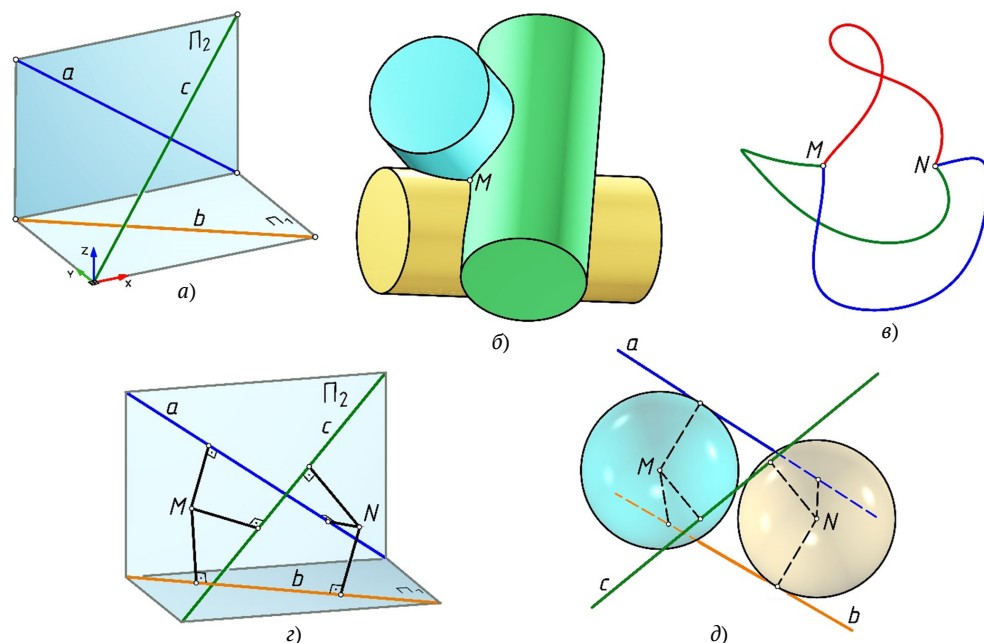


Рис. 9.4. 3D-модель и решение комплексной задачи 4:
 a – дано; b – цилиндры как ГМТ; c – линия пересечения и искомые точки;
 d – проверка решения; e – касательные сферы

Анализ. ГМТ, удаленных от прямой на заданное расстояние, – это поверхность кругового цилиндра, осью которого является заданная прямая, а радиус – заданное расстояние. Искомая точка должна принадлежать поверхности трех цилиндров радиуса r с осями, которыми являются заданные скрещивающиеся прямые, т. е. принадлежать линии пересечения этих цилиндров.

Исследование. Два цилиндра пересекаются по пространственной замкнутой кривой четвертого порядка. Третий цилиндр может пересечь эту кривую максимально в четырех точках. Следовательно, задача может иметь максимально четыре решения. В зависимости от взаимного положения цилиндров количество решений может снижаться до нуля.

Алгоритм. Построить три цилиндра и получить линию их пересечения. Искомые точки определить как особые точки этой линии.

Реализация алгоритма

1. На рис. 9.4б показаны три цилиндра, построенные командой «Цилиндр» . Каждый цилиндр имеет осью один из заданных отрезков и радиус 30 мм. Цилиндры являются объектами типа «3D солид».
2. Командой «Объединение»  выполнено пересечение цилиндров и получена линия их пересечения. Командой «Редактировать тело»  создана копия линии в виде трех сплайнов (рис. 9.4в).
3. На линии пересечения найдены точки M , N совмещения трех сплайнов. Они являются общими точками трех цилиндров и, следовательно, искомыми точками решения задачи. То есть при заданных параметрах задача имеет два решения.

Проверка решения

Из найденных точек M , N на каждый из заданных отрезков опущены перпендикуляры (рис. 9.4г), длина каждого из них равна расстоянию от точки до отрезка. Если длины всех перпендикуляров равны заданной величине 30 мм, то задача решена верно.

Известно, что прямая, перпендикулярная радиусу сферы, является касательной к этой сфере. Поэтому найденные точки M , N являются центрами двух сфер, имеющих радиус, равный 30 мм, каждая из которых является касательной к трем заданным скрещивающимся прямым (рис. 9.4д). Из этого следует вторая формулировка рассмотренной задачи: *построить сферу заданного радиуса, касательную к трем скрещивающимся прямым.*

Алгоритмы построения 3D-модели и решение на проекционном чертеже приведены в разделе 10.4.

- Лектору: откройте файл «Комплексная 4 .dwg» (см. раздел 10.4) и поясните решение задачи алгоритмом 3D и на проекционном чертеже.

9.5. Комплексные задачи как пример исследовательской работы студентов

Комплексная задача может быть темой студенческой исследовательской работы или реферата. Примером является рассмотренная выше задача 4. На ее

основе в развитие геометрической модели можно сформулировать две темы исследований.

9.5.1. Точки, равноудаленные от трех скрещивающихся прямых

Задача 5. Определить ГМТ, равноудаленных от трех скрещивающихся прямых a, b, c (рис. 9.4а).

Анализ. Формулировка этой задачи отличается от задачи 4 (см. выше, раздел 9.4.4) тем, что положение искомой точки задано не величиной расстояния до прямых, а условием равенства этих расстояний. При этом скрещивающиеся прямые те же, что в задаче 4.

Как показано в задаче 4, искомые точки являются центрами сфер, касательных к заданному скрещивающимся прямым. Поэтому возможна другая формулировка задачи 5: определить ГМТ центров сфер, касательных к трем заданным скрещивающимся прямым.

Рассматриваемую задачу 5 можно сформулировать как тему исследований: определить влияние радиуса сферы, касательной к трем скрещивающимся прямым, на положение точки центра сферы.

Исследование. Для фиксированного расстояния приведенный в задаче 4 алгоритм позволяет найти решение в виде двух точек. Варьируя расстояние, можно получить множество таких точек. Вероятно, это пространственная кривая линии, соединяющая точки, полученные при фиксированных значениях расстояния. Вид этого множества, т. е. кривой линии, можно определить лишь в результате экспериментального исследования и построения.

Алгоритм и его реализация

На рис. 9.5 показано построение искомой линии. Созданы три солид-цилиндра (рис. 9.5а), имеющих осями заданные прямые и одинаковый радиус 30 мм. Длина каждого цилиндра задана 400...500 мм. Это позволило выполнить исследование в широком диапазоне значений расстояний от точек до заданных прямых.

Для определения искомых точек можно, как и в задаче 4, применить булеву операцию «Объединение», получить копию линии пересечения и на ней найти особые точки (см. рис. 9.4в). В рассматриваемой задаче применен другой вариант определения этих точек. К цилиндрам применена булева операция «Пересечение». Форма солид-объекта, получаемого в пересечении цилиндров, наглядно позволяет определить искомые точки M, N . На рис. 9.5б показан солид-объект, полученный для значения радиуса цилиндров, равного 30 мм.

На рис. 9.5в показан результат экспериментального исследования. Это пространственная кривая s , плавно соединяющая экспериментальные точки. Рядом с точками проставлены значения расстояний от точек до заданных скрещивающихся прямых a, b, c . Это также значения радиусов r сфер, касательных к заданным прямым. Имеется минимальное значение расстояния и радиуса $r_{\min}$, при которых задача еще имеет решение. Для заданных прямых a, b, c значение $r_{\min} \approx 23.7$ мм. Для наглядности приведена одна из двух сфер, построенных при $r = 24$. Эта сфера имеет центр в точке 24 и в точках A, B, C касается

прямых a, b, c . Показано, что при заданных прямых a, b, c для значения $r > r_{\min}$ линия s развивается в обе стороны, т. е. задача для фиксированного значения r имеет два решения.

Алгоритм построения 3D-модели задачи 5 приведен в разделе 10.5.

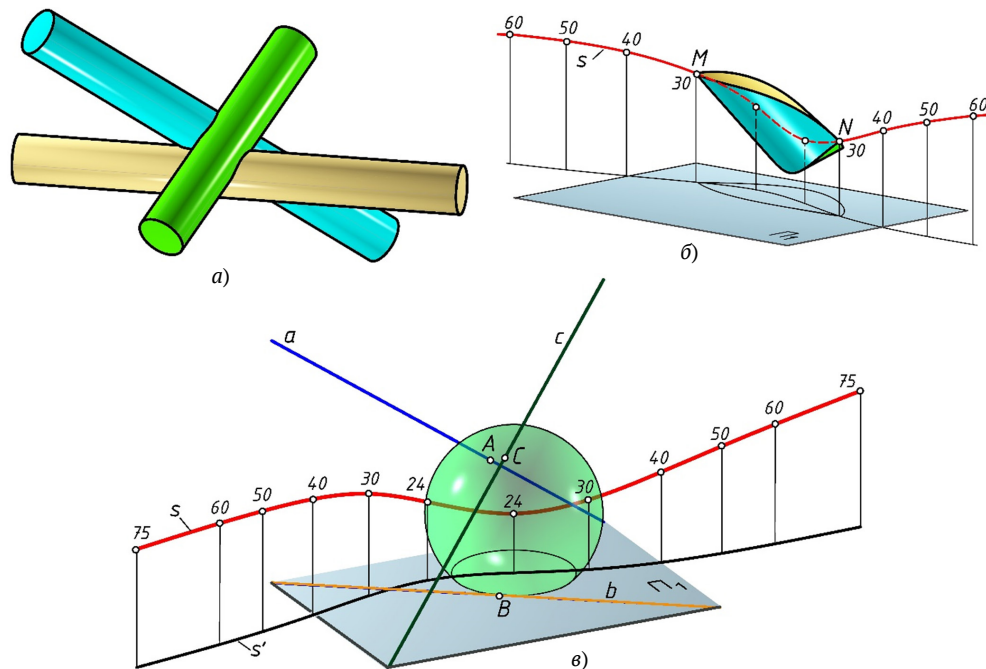


Рис. 9.5. 3D-модель комплексной задачи 5:

a – цилиндры как ГМТ, равноудаленных от скрещивающихся прямых;
 $б$ – тело пересечения цилиндров; $в$ – линия как ГМТ центров сфер

Трудно представить решение рассматриваемой задачи 5 методами начертательной геометрии ввиду их сложности и трудоемкости (ведь для каждого значения расстояния необходимо построить чертеж, подобный приведенному на рис. 10.4!). Напротив, 3D-моделирование в Платформе папoCAD позволило решить задачу просто и наглядно.

- Лектору: откройте файл «Комплексная 5 .dwg» (см. раздел 8.3.5) и по 3D-модели поясните решение задачи.

9.5.2. Исследование количества решений

Постановка задачи. При исследовании задачи 4 (см. выше, раздел 9.4) о нахождении точек, удаленных на заданное расстояние от скрещивающихся прямых, было установлено, что количество решений при варьировании параметров может быть от 0 до 4. Для прямых, приведенных на рис. 9.4а, и при расстоянии 30 получено два решения, т. е. две точки.

Задача 6. В задаче 4 построить 3D-модели, в которых количество решений составляет 0, 1, 3, 4.

Анализ и исследование. Количество решений в задаче 4 определяется условиями пересечения трех цилиндров. Был рассмотрен пример с двумя решениями. Для получения различного количества решений достаточно перед объединением цилиндров перемещать один из них, сохраняя положение двух других. Перемещение проще всего задать, сохраняя параллельность оси цилиндра ее исходному положению.

Поскольку цилиндр является проецирующей поверхностью, то количество пересечений, т. е. количество решений, можно предварительно определить на виде, направление которого задано вдоль оси третьего цилиндра.

Алгоритм. Выбрать два цилиндра и получить линию их пересечения. Установить вид вдоль оси третьего цилиндра. Перемещать этот цилиндр, задавая различные варианты его пересечения с линией пересечения первых двух цилиндров.

Реализация алгоритма. На рис. 9.6а показаны те же три цилиндра, что в задаче 4 (см. рис. 9.4б). Установлен вид, при котором зеленый цилиндр отображен в виде окружности. Для двух оставшихся цилиндров применена булева операция «Объединение», в результате которой получена линия v их пересечения. Цилиндрам присвоена прозрачность 70 %, что позволило наглядно показать эту линию. Зеленый цилиндр пересекает линию v в двух точках M и N . Поэтому было получено решение в виде указанных двух точек или двух касательных сфер радиуса 30 (см. выше рис. 9.4в, з, д).

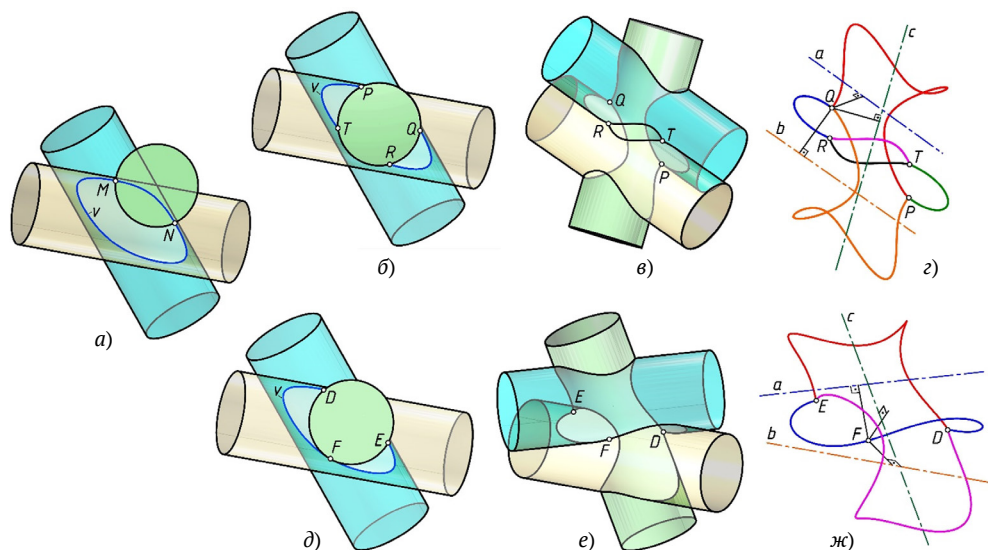


Рис. 9.6. 3D-модель комплексной задачи 6 о количестве равноудаленных точек:
а – к объяснению алгоритма; б, в, з – четыре искомые точки; д, е, ж – три искомые точки

На рис. 9.6б показан вариант решения с четырьмя точками. Для этого зеленый цилиндр перемещен так, что его поверхность пересекает линию v в четырех точках P , Q , R , T . Последующее объединение всех трех цилиндров при-

вело к модели (рис. 9.6в), в которой линия пересечения трех цилиндров имеет четыре указанные точки, в каждой из которых сходятся по три ветви. Каждая из этих точек является общей для трех цилиндров и поэтому является решением задачи. На рис. 9.6г линия пересечения скопирована вместе с осями цилиндров – заданными скрещивающимися прямыми a, b, c . Для каждой точки выполнена проверка построением трех перпендикуляров к прямым a, b, c . Показаны отрезки только из точки Q . Длины всех 12 отрезков равны между собой, что подтверждает правильность выполненных построений.

На рис. 9.6д показано, как получить решение для трех точек. Для этого зеленый цилиндр установлен в одно из возможных положений, в которых его поверхность касается линии v в некоторой точке F и пересекает ее в двух других точках D, E . После объединения трех цилиндров получена модель с тремя точками D, E, F , являющимися решением задачи (рис. 9.6е, ж). Выполнена проверка правильности решения построением перпендикуляров к осям цилиндров. На рис. 9.6ж показана проверка для точки касания F .

Рассмотренным алгоритмом можно построить модель и с единственным решением. Для этого зеленый цилиндр должен касаться линии v в одной точке, находясь вне этой линии и не пересекая ее.

Если зеленый цилиндр не будет пересекать или касаться линии v , то не будет общих точек трех цилиндров и решение отсутствует.

Алгоритм построения 3D-моделей приведен в разделе 10.6.

- Лектору: откройте файл «Комплексная 6 .dwg» (см. раздел 10.6) и по 3D-модели поясните решение задачи.

9.6. Комплексные задачи на построение прямых

Перейдем к комплексным задачам на применение геометрических множеств прямых линий, приведенных в разделе 9.2. Рассмотрим три простые комплексные задачи, типовые для курса начертательной геометрии, но рассмотрим их решение методами 3D. Затем приведем две сложные задачи на эти множества.

9.6.1. Прямая через заданную точку, параллельная двум плоскостям

Задача 7. Построить отрезок прямой m , проходящий через заданную точку M и параллельный двум заданным плоскостям $\Sigma(a, b)$ и $\Delta(c, d)$ (рис. 9.7а).

Схему решения задачи запишем в текстовой и рекомендуемой в курсе начертательной геометрии символической форме.

Дано: плоскости Σ, Δ , точка M .

Построить: прямую; $m \supset M, m \parallel \Sigma; m \parallel \Delta$.

Анализ

1. Множество прямых, проходящих через точку M и параллельных плоскости Σ , – это плоскость Σ' , проходящая через эту точку параллельно плоскости Σ .

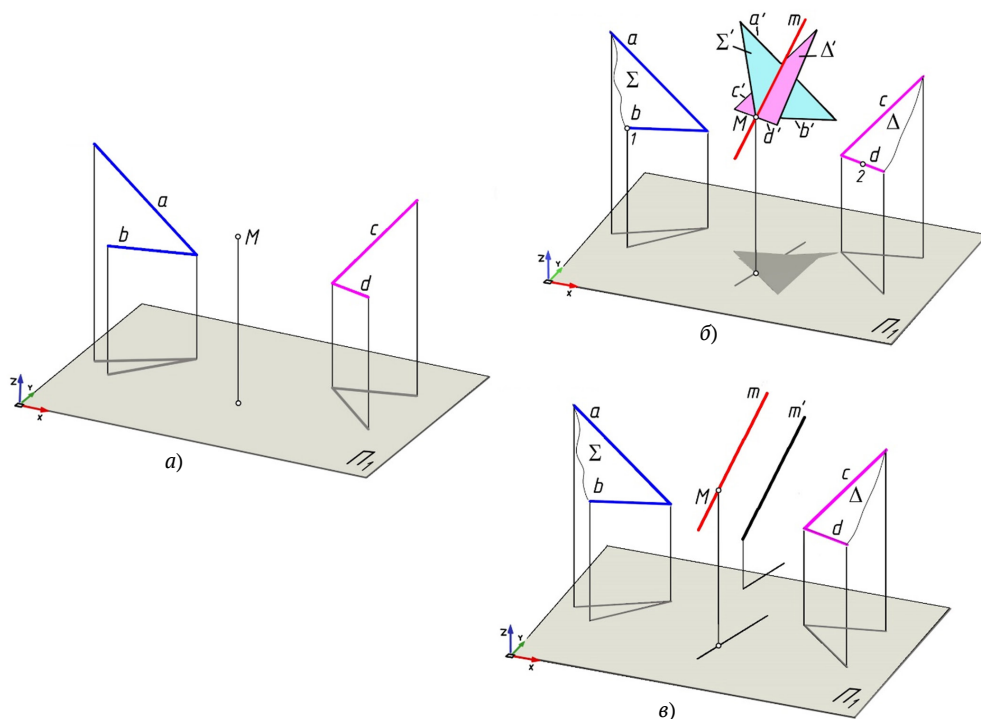


Рис. 9.7. 3D-модель комплексной задачи 7 о прямой, параллельной двум плоскостям: а – дано; б – алгоритм 1; в – алгоритм 2

2. Множество прямых, проходящих через точку M и параллельных плоскости Δ , – это плоскость Δ' , проходящая через эту точку параллельно плоскости Δ .

То же в символьной записи:

$$1) \{m: (m \supset M, m \parallel \Sigma)\} \Rightarrow \Sigma' \parallel \Sigma; \Sigma' \supset M;$$

$$2) \{m: (m \supset M, m \parallel \Delta)\} \Rightarrow \Delta' \parallel \Delta; \Delta' \supset M.$$

Исследование

Общим элементом выявленных множеств является линия пересечения плоскостей Σ' и Δ' . Поскольку две плоскости пересекаются по одной прямой, то задача имеет решение, причем единственное. Если $\Sigma' \parallel \Delta'$, то линия пересечения этих плоскостей отсутствует и задача не имеет действительного решения.

Исследование в символьной записи:

$$m = \Sigma' \cap \Delta' - \text{единственное решение.}$$

Алгоритмы решения

Комплексные задачи могут иметь несколько алгоритмов решения. В рассматриваемой задаче выделим два алгоритма.

Алгоритм 1 (рис. 9.7б):

- 1) построить плоскость Σ' копированием отрезков плоскости Σ в заданный маркер точки M ;

- 2) построить плоскость Δ' копированием отрезков плоскости Δ в заданный маркер точки M ;
- 3) найти линию пересечения плоскостей.

В символьной записи:

- 1) $\Sigma' \parallel \Sigma; \Sigma' \supset M$;
- 2) $\Delta' \parallel \Delta; \Delta' \supset M$;
- 3) $m = \Sigma' \cap \Delta'$ – искомая прямая линия.

Алгоритм 2 (рис. 9.7в) основан на том, что прямая, параллельная линии пересечения плоскостей, параллельна каждой из плоскостей. Следовательно:

- 1) найти линию пересечения плоскостей Σ и Δ ;
- 2) скопировать линию пересечения в точке M .

В символьной записи:

- 1) $m' = \Sigma \cap \Delta$;
- 2) $m \parallel m', m \supset M$.

Сравнение алгоритмов показывает, что алгоритм 2 сложнее в восприятии, но требует меньше построений, поэтому эффективнее.

Реализация алгоритмов

По алгоритму 1 (см. рис. 9.7б):

- ◆ скопировать отрезки плоскостей Σ и Δ так, чтобы одна из прямых каждой плоскости проходила через точку M . В результате построены плоскости Σ' и Δ' ;
- ◆ построить линию m пересечения плоскостей Σ' и Δ' , применив один из методов, приведенных в разделе 5.7.

По алгоритму 2 (см. рис. 9.7в):

- ◆ построить линию m' пересечения заданных плоскостей Σ и Δ ;
- ◆ скопировать линию m' так, чтобы она проходила через точку M .

Проверка правильности решения

Первая проверка: следует убедиться, что полученная прямая m параллельна двум заданным плоскостям:

- ◆ установить ПСК по трем точкам в плоскость Σ и командой «Список» или через панель «Свойства» определить координаты концов отрезка проверяемой прямой m . Z -координаты концов отрезка m должны быть равны между собой;
- ◆ проверить параллельность прямой m плоскости Δ .

Вторая проверка: убедиться, что прямая m проходит через точку M или что точка M принадлежит прямой m :

- ◆ установить ПСК, направив ось Z по конечным точкам отрезка m . Убедиться, что X, Y -координаты точки M в этой ПСК равны нулю.

Алгоритм построения 3D-моделей приведен в разделе 10.7. Там же для сравнения приведено решение задачи на проекционном чертеже.

- Лектору: откройте файл «Комплексная 7 .dwg» (см. раздел 10.7) и по 3D-модели поясните решение задачи. Поясните решение на проекционном чертеже.

9.6.2. Прямая через заданную точку, пересекающая две скрещивающиеся прямые

Задача 8. Построить прямую m , проходящую через заданную точку M и пересекающую две заданные скрещивающиеся прямые a, b (рис. 9.8а).

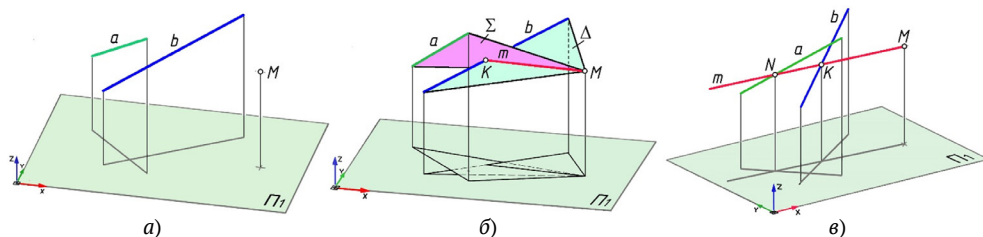


Рис. 9.8. 3D-модель комплексной задачи 8 о прямой, пересекающей две скрещивающиеся прямые:
а – дано; б – алгоритм 1; в – алгоритм 2

Анализ. Множество прямых, проходящих через точку M и пересекающих отрезок a , – это плоскость $\Sigma(M, a)$. Множество прямых, проходящих через точку M и пересекающих отрезок b , – это плоскость $\Delta(M, b)$. Следовательно, искомый отрезок m является общим элементом этих множеств, т. е. линией пересечения плоскостей Σ и Δ .

Исследование. Поскольку две плоскости имеют единственную линию пересечения, то задача имеет решение, причем единственное.

Алгоритмы. Приведем два алгоритма решения задачи.

Первый алгоритм решения (рис. 9.8б):

- ◆ построить треугольник плоскости $\Sigma(M, a)$;
- ◆ построить треугольник плоскости $\Delta(M, b)$;
- ◆ найти отрезок линии пересечения треугольников – это отрезок искомой прямой m .

Второй алгоритм решения (рис. 9.8в). Поскольку плоскости Σ и Δ имеют общую точку M , то для построения линии их пересечения достаточно найти еще одну точку этой линии, например точку K пересечения отрезка b с плоскостью Σ :

- ◆ построить треугольник Σ ;
- ◆ найти точку K пересечения отрезка b с плоскостью Σ ;
- ◆ построить отрезок $m = MK$ – это отрезок искомой прямой m ;
- ◆ удлинить отрезок MK до пересечения с прямой a в точке N .

Сравнение алгоритмов показывает, что второй алгоритм требует меньше построений.

Для проверки правильности решения следует убедиться, что имеет место пересечение прямой m с прямыми a, b . Для этого, применив привязку «Пересечение», достаточно поставить маркеры точек N, K (рис. 9.8в).

Алгоритм построения 3D-моделей, его символьная запись и решение задачи на проекционном чертеже приведены в разделе 10.8.

- Лектору: откройте файл «Комплексная 8 .dwg» (см. раздел 10.8) и по 3D-модели поясните решение задачи. Поясните решение на проекционном чертеже.

9.6.3. Прямая через заданную точку, перпендикулярная двум скрещивающимся прямым

Задача 9. Найти отрезок m , проходящий через заданную точку K и перпендикулярный двум заданным скрещивающимся прямым a, b (рис. 9.9а).

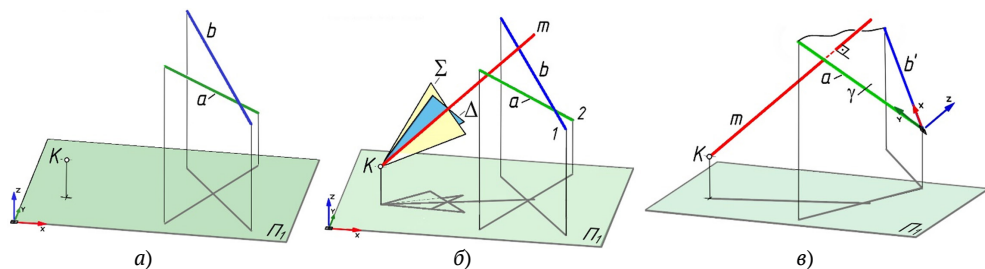


Рис. 9.9. 3D-модель комплексной задачи 9:
а – дано; б – алгоритм 1; в – алгоритм 2

Анализ. Множество отрезков, проходящих через заданную точку K и перпендикулярных отрезку a , – это плоскость Σ , содержащая точку K и перпендикулярная этому отрезку (рис. 9.9б). Множество отрезков, проходящих через точку K и перпендикулярных отрезку b , – это плоскость Δ , также содержащая точку K и перпендикулярная отрезку b (рис. 9.9б). Искомый отрезок будет линией пересечения плоскостей Σ и Δ .

Исследование. Поскольку две плоскости имеют единственную линию пересечения, то задача имеет решение, причем единственное.

Алгоритм. Рассмотрим два алгоритма решения задачи.

Алгоритм 1 решения (рис. 9.9б):

- ◆ задать плоскость Σ , перпендикулярную прямой a и проходящую через точку K ;
- ◆ задать плоскость Δ , перпендикулярную прямой b и проходящую через точку K ;
- ◆ построить линию пересечения плоскостей Σ и Δ – это искомая линия пересечения m .

Алгоритм 2 (рис. 9.9в).

Алгоритм основан на том, что прямая, перпендикулярная плоскости, перпендикулярна любой прямой этой плоскости, а также прямой, параллельной этой плоскости. Необходимо построить какую-либо плоскость параллелизма заданных прямых. Для этого, например, можно копированием построить прямую $b' \parallel b$, совместив при копировании конечную точку 1 прямой b с точкой 2 прямой a . Плоскость γ ($a \cap b'$) будет параллельна каждой из заданных прямых, т. е. плоскостью параллелизма этих прямых. Отрезок m , перпендикулярный этой плоскости, составляет прямой угол с любой прямой этой плоскости, в том

числе с прямыми a, b' . Поскольку $b' \parallel b$, то отрезок m будет перпендикуляром и к прямой b . Итак, согласно алгоритму, 2 следует:

- ◆ копированием заданных скрещивающихся прямых a, b задать плоскость параллелизма этих прямых;
- ◆ из точки K опустить перпендикуляр на плоскость параллелизма – эта прямая является решением задачи.

Проверка правильности решения

Построенная прямая m по отношению к заданным a, b является скрещивающейся. Доказать правильность решения можно через построение и измерение углов между скрещивающимися прямыми (см. выше, раздел 7.13). Более простой алгоритм проверки следующий:

- ◆ установить ПСК осью Z вдоль отрезка найденной прямой m , начало координат – в произвольной точке прямой m ;
- ◆ командой «Список» определить координаты концов отрезков a, b . При правильном решении концы отрезка a должны иметь равные Z -координаты. То же для отрезка b . Это означает, что отрезки a, b параллельны плоскости XY . Поскольку плоскость XY перпендикулярна отрезку m , то отрезки a, b также перпендикулярны отрезку m .

Параметры 3D-моделей, символьная запись алгоритмов, примеры реализации и решение на проекционном чертеже приведены в разделе 10.9.

- Лектору: откройте файл «Комплексная 9 .dwg» (см. раздел 10.9). По 3D-модели и проекционному чертежу поясните решение задачи.

9.6.4. Прямая через заданную точку, на заданном расстоянии от другой и пересекающая заданную прямую

Задача 10. Построить прямую, проходящую через точку A на расстоянии 25 мм от точки B и пересекающую прямую m .

Рассматриваемая задача обладает повышенной сложностью. Такая оценка связана с выявлением геометрических множеств, которым должен отвечать искомый элемент, т. е. с анализом и исследованием задачи. После того как множества определены и выполнено исследование, решение может оказаться весьма простым.

Анализ. Искомая прямая m задачи 10 (рис. 9.10а) должна удовлетворять трем условиям. Для того чтобы прямая проходила через точку A и пересекала прямую m , она должна принадлежать плоскости, задаваемой указанными точкой и прямой; назовем эту плоскость Δ (рис. 9.10б). Для того чтобы расстояние от искомой прямой до точки B составляло заданную величину 25, прямая должна принадлежать поверхности прямого кругового конуса α с вершиной в точке A , внутренняя поверхность которого является касательной к сфере β , имеющей центр в точке B и радиус 25. Таким образом, искомая прямая должна принадлежать трем геометрическим множествам:

- 1) множеству прямых, проходящих через заданную точку и пересекающих заданную прямую, – это плоскость Δ ;

- 2) множеству прямых, расстояние от которых до заданной точки равно 25, – это прямые, касательные к сфере β , имеющей радиус 25;
- 3) множеству прямых, проходящих через заданную точку и касательных к сфере, – это поверхность конуса α .

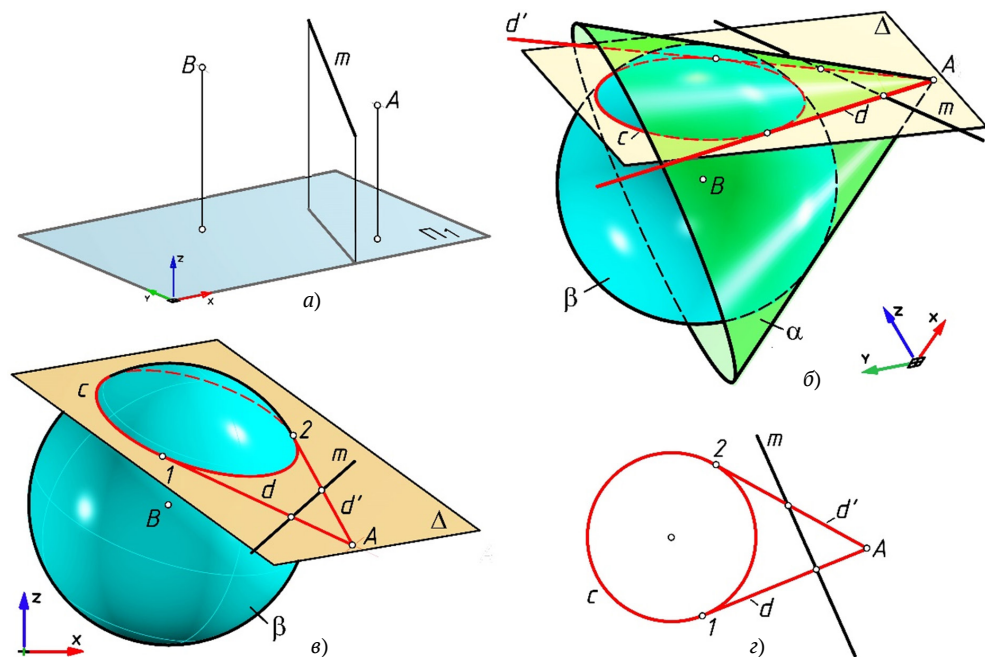


Рис. 9.10. 3D-модель комплексной задачи 10:
 а – дано; б – геометрические множества задачи;
 в – построение сечения сферы; з – построение касательных

Исследование. Результат решения (рис. 9.10в, з) зависит от условий пересечения плоскости Δ со сферой β . Если пересечение реализуется, то задача имеет два решения – это прямые d и d' , касательные из точки A к окружности c , являющейся линией пересечения плоскости со сферой S . Если плоскость Δ лишь касается сферы, то прямые d и d' совпадают и задача имеет единственное решение. Если плоскость Δ не пересекает сферу – решение отсутствует.

На рис. 9.10 приведена 3D-модель, в которой задача имеет два решения.

Алгоритм:

- 1) построить сферу радиуса 25 с центром в точке B ;
- 2) построить сечение сферы плоскостью Δ (A, m) – окружность c ;
- 3) провести касательные прямые d, d' из точки A к окружности сечения, которые являются искомыми прямыми.

Проверка решения

Для проверки правильности решения следует убедиться, что расстояние от найденных отрезков d, d' до центра сферы равно 25. Для этого постройте от-

резки перпендикуляров, привязка «Нормаль», из центра сферы, точки B , на отрезки найденных прямых. Измерьте длину отрезков, которая должна быть равна заданному значению 25 мм.

Параметры 3D-моделей, пример реализации и решение на проекционном чертеже приведены в разделе 10.10.

- Лектору: откройте файл «Комплексная 10 .dwg» (см. раздел 10.10). По 3D-модели и проекционному чертежу поясните решение задачи.

9.6.5. Прямая через заданную точку, под углом к заданной прямой и на заданном расстоянии от другой точки

Задача 11. Через точку A провести прямую, пересекающую прямую AB под углом 30° и отстоящую от прямой CD на расстояние 20 мм (рис. 9.11а).

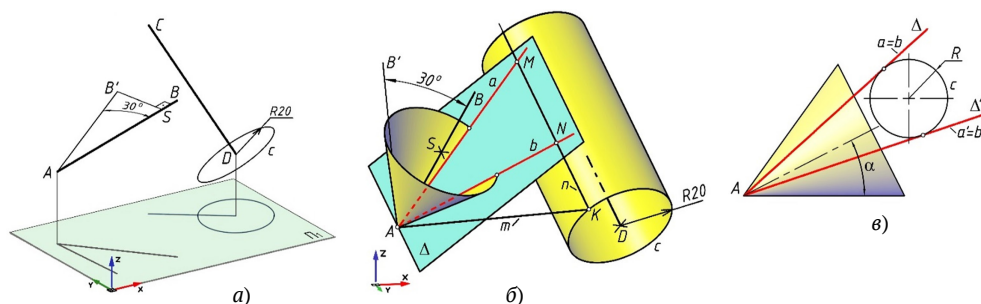


Рис. 9.11. 3D-модель комплексной задачи 11:

a – дано; b – геометрические множества;
 v – вариант с максимальным количеством решений

Анализ. Множество прямых, проходящих через точку A под углом 30° к прямой AB , – это поверхность кругового конуса с вершиной A , осью AB и углом при вершине 30° (рис. 9.11б).

Множество прямых, проходящих через точку A и отстоящих на 20 мм от прямой CD , – плоскость, проходящая через точку A и касательная к цилиндру, имеющему ось CD и радиус 20.

Вывод: искомая прямая является результатом пересечения касательной плоскости с конусом.

Исследование. Плоскость, проходящая через вершину конуса, пересекает его по двум образующим. К цилиндру из заданной точки можно построить максимально две касательные плоскости, охватывающие его с двух сторон. Следовательно, максимальное количество касательных прямых, т. е. количество решений задачи, равно четырем.

Если из двух касательных плоскостей только одна пересекает конус, то образуется два решения. Если плоскость лишь касается конуса или конус касается цилиндра, то возможно количество решений 1 или 3.

Положение и размеры конуса и цилиндра могут быть такими, что плоскости не пересекают конус. В этом случае решение отсутствует.

Таким образом, в зависимости от параметров задачи количество решений может быть от нуля (отсутствие решения) до четырех.

На рис. 9.11б показан вариант, в котором плоскость Δ пересекает конус по двум прямым и является единственной касательной плоскостью к цилиндру. Количество решений в этом примере равно двум – это прямые a, b . На рис. 9.11в конус пересекают две плоскости: Δ и Δ' ; в итоге образуется четыре решения (прямые a, b, a', b').

Алгоритм. Постройте конус с осью AB и углом при вершине 30° . Постройте цилиндр с осью CD и радиусом основания 20. Постройте прямую n , являющуюся линией касания плоскости Δ , проходящей через точку A и касательной к поверхности цилиндра. Постройте пересечение конуса плоскостью Δ , задав плоскость прямой n и вершиной конуса точкой A . Линии пересечения являются решением задачи.

Построение конуса является необходимым для решения. Но цилиндр и плоскость (см. рис. 9.11б) построены лишь для наглядности 3D-модели и пояснений к ней. Для решения задачи в них нет необходимости, достаточно построить отрезок касательной прямой n . Однако рекомендуем построить и эти объекты, чтобы получить не просто правильное решение, но добиться, чтобы решение было наглядным и красивым.

Для проверки решения необходимо убедиться в следующем:

- 1) расстояние от найденных прямых до отрезка CD равно 20;
- 2) углы между каждым из отрезков a, b и отрезком AB равны 30° .

Параметры 3D-моделей, пример реализации, проверка решения и построение на проекционном чертеже приведены в разделе 10.11.

○ Лектору:

- откройте файл «Комплексная 11 .dwg» (см. раздел 10.11). По 3D-модели и проекционному чертежу поясните решение задачи;
- в качестве самостоятельного исследования предложите построить 3D-модели для всех вариантов с количеством решений от нуля до четырех.

9.7. Комплексные задачи на построение плоскостей

Рассмотрим примеры комплексных задач, в которых искомым элементом является плоскость. Первая задача – с историческими корнями. Вторая – с оригинальным геометрическим множеством. Третья задача – типовая, но весьма сложная.

9.7.1. Плоскость, удаленная на заданные расстояния от трех заданных точек

Задача 12. Построить плоскость, удаленную от точек A, B, C на расстояние 20, 10, 5 мм соответственно.

Анализ. Множество плоскостей, удаленных на заданное расстояние от одной заданной точки, – это плоскости, касательные к сфере, имеющей центр в за-

данной точке и радиус, равный заданному расстоянию. Поэтому искомая плоскость, обозначим ее Δ , если она существует, будет касательной к трем сферам α, β, γ , центры которых расположены в заданных точках A, B, C , а радиусы равны заданным расстояниям (рис. 9.12а).

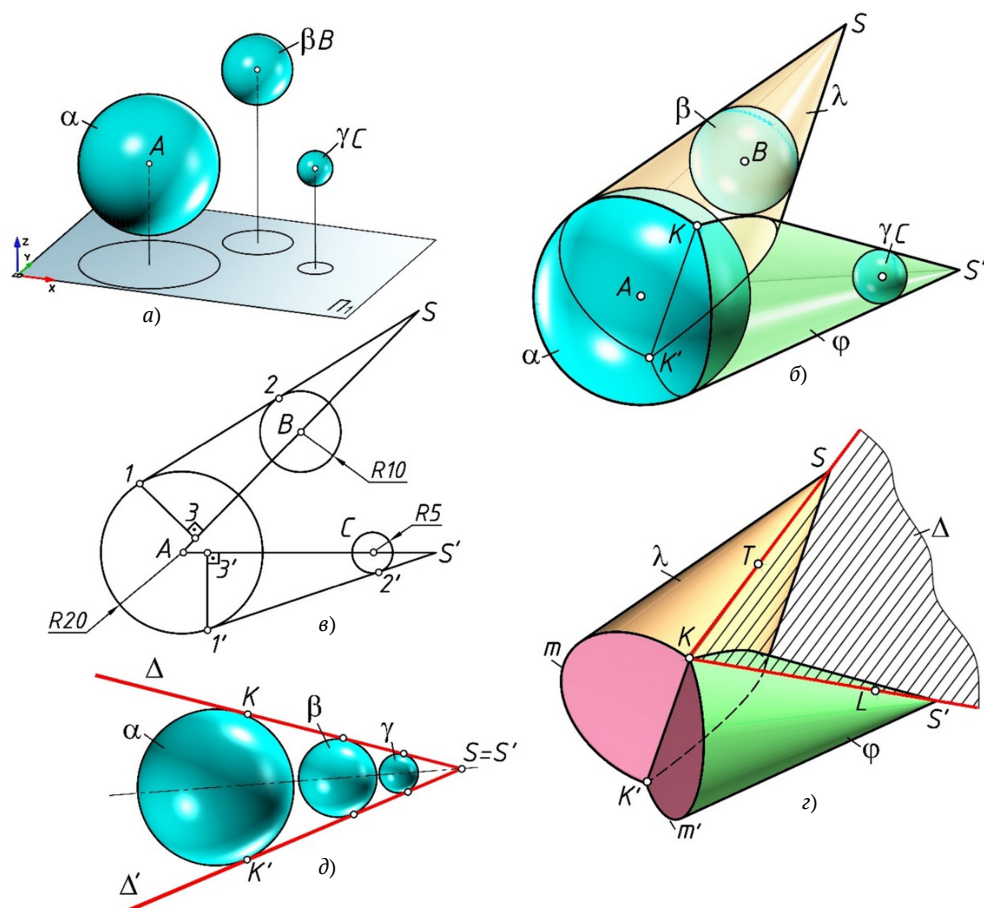


Рис. 9.12. 3D-модель комплексной задачи 12. Внешнее касание конусов:

а – дано; б – геометрические множества; в – разметка;
г – касательные конусы; д – касательные плоскости

Таким образом, приходим к задаче о построении плоскости, касательной к трем сферам заданных размеров и положений. Эта задача была рассмотрена Гаспаром Монжем в его основополагающей книге «Начертательная геометрия» [6, задача 42].

Выявляем множества, которым должна принадлежать искомая плоскость. Рассмотрим два конуса. Первый – конус λ (рис. 9.12б), все образующие которого являются касательными к сферам α, β . Плоскости, касательные к поверхности этого конуса, касаются его по образующим, проходящим через вершину конуса S , и образуют первое множество искомых плоскостей. Плоскости

этого множества находятся на заданных расстояниях до центров сфер α , β , т. е. до точек A и B .

Второй конус $\varphi(\alpha, \gamma)$ имеет вершину S' и является касательным к сферам α , γ . Плоскости, касательные к поверхности конуса φ , образуют второе множество искомых плоскостей. Они находятся на заданных расстояниях до точек A и C .

Пары конусов λ , φ имеют общую касательную сферу α , на поверхности которой расположены точки K , K' , в которых пересекаются касательные образующие обоих конусов.

Исследование. Общим элементом выявленных множеств и, следовательно, решением задачи является плоскость, касательная одновременно обоих конусов. Эта плоскость будет проходить через вершины конусов S , S' и точку пересечения линий касания конусов с общей касательной сферой A . Если названные три точки существуют, то существует и плоскость, касательная к трем сферам и отвечающая условиям задачи. В приведенном примере (см. рис. 9.12б) таких плоскости две. Первая определена точками S , S , K . Вторая плоскость – точками S , S , K' .

Количество возможных решений рассмотрено ниже.

Выбор пар сфер для построения конусов и общей касательной сферы является произвольным. В нашем примере для наглядности в качестве общей выбрана сфера α как наибольшая из заданных сфер.

Алгоритм решения

Возможны различные алгоритмы решения. Рассмотрим алгоритм, предложенный Гаспаром Монжем, и приведем его применительно к современной 3D-реализации.

1. В плоскости, заданной точками A , B , C центров сфер, построим диаметрально противоположные окружности сфер (рис. 9.12в). Одну из них принимаем за окружность общей сферы, в нашем примере это окружность R_{20} сферы α . Окружность R_{10} – окружность сферы β , R_5 – сферы γ . Для построения конуса λ строим отрезок AB оси конуса и отрезок образующей (1, 2), касательный к окружностям R_{20} , R_{10} . При удлинении отрезков находим точку S их пересечения. Из точки касания 1 опускаем перпендикуляр на ось конуса и находим центр 3 основания конуса λ .
2. Для построения конуса φ повторяем построения и находим точки S' , $1'$, $3'$.
3. Строим конусы λ , φ как солид-объекты. Центры оснований указываем в точках 3, $3'$, радиусы основания задаем по точкам 1, $1'$, высоты конусов – по точкам S , S' .
4. Объединяем конусы (рис. 9.12г), и на образующей при объединении линии пересечения находим точки K , K' .

Плоскости $\Delta(S, S', K)$ и $\Delta'(S, S', K')$ являются искомым решением задачи.

На рис. 9.12г показаны образующие конусов, отрезки KS и $K'S'$, по которым происходит касание плоскости Δ с поверхностями конусов λ , φ . Эти отрезки более наглядно воспроизводят найденную плоскость как заданную пересекающимися прямыми $\Delta(KS \cap K'S')$. Показаны точки T , L касания сфер β , γ с плоскостью Δ .

Точки касания находятся как основания перпендикуляров, опущенных из центров сфер на отрезки касательных или на плоскость Δ .

По второму алгоритму решения задачи точки K, K' определяем построением окружностей m, m' , являющихся сечениями общей сферы плоскостями оснований конусов. Искомые точки находятся на пересечении этих окружностей. Сами конусы при этом можно не строить.

Могут быть предложены и другие алгоритмы, позволяющие построить необходимые для решения точки K, K' .

Количество решений

Согласно исследованию Гаспара Монжа задача может иметь восемь решений. Рассмотрим эти решения.

Для каждой пары сфер α, β и α, γ существует два касательных конуса, один с внешним касанием, второй – с внутренним касанием. При внешнем касании вершина конуса расположена вне отрезка, соединяющего центры сфер. Пример внешнего касания рассмотрен выше, это конусы λ, φ (см. рис. 9.12б, з). При внешнем касании образуются две касательные плоскости Δ и Δ' . Плоскости пересекаются по отрезку SS' , соединяющему вершины конусов. Они наглядно показаны на рис. 9.12д, изображение которого передает вид в направлении отрезка SS' .

При внутреннем касании сфер вершина конуса расположена между центрами сфер. Пример, в котором оба конуса являются внутренними, приведен на рис. 9.13а, б, в. В разметке (рис. 9.13а) прямые, касательные к окружностям, построены с внутренней стороны окружностей. Каждый конус составлен из двух частей (рис. 9.13б). При внутреннем касании конусов также образуются две касательные плоскости Σ и Σ' (рис. 9.13в).

Решение может быть получено, если один конус построить с внешним, второй – с внутренним касанием. Таких смешанных вариантов два. Первый: конус $\lambda(\alpha, \beta)$ имеет внешнее касание, а конус $\varphi(\alpha, \gamma)$ – внутреннее касание (рис. 9.13г). Здесь решением являются плоскости Ω и Ω' . Второй смешанный вариант: конус $\lambda(\alpha, \beta)$ имеет внутреннее касание, конус $\varphi(\alpha, \gamma)$ – внешнее (рис. 9.13д). Решением являются плоскости ϑ и ϑ' .

Итого для заданных сфер возможно восемь касательных плоскостей: $\Delta, \Sigma, \Omega, \vartheta$ и парные к ним.

Количество решений уменьшается, если сферы пересекаются, поскольку становится невозможным построение части конусов с внутренним касанием или всех таких конусов. Если хотя бы одна из сфер находится внутри другой, то задача не имеет решения, поскольку один или оба конуса построить невозможно.

Проверка решения

Следует установить ПСК в найденную касательную плоскость и в этой системе координат измерить координаты точек A, B, C . Значения Z -координат определяют расстояния точек до плоскости XY ПСК, т. е. до найденной касательной плоскости, и должны быть равны заданным значениям расстояний от точек до искомой плоскости.

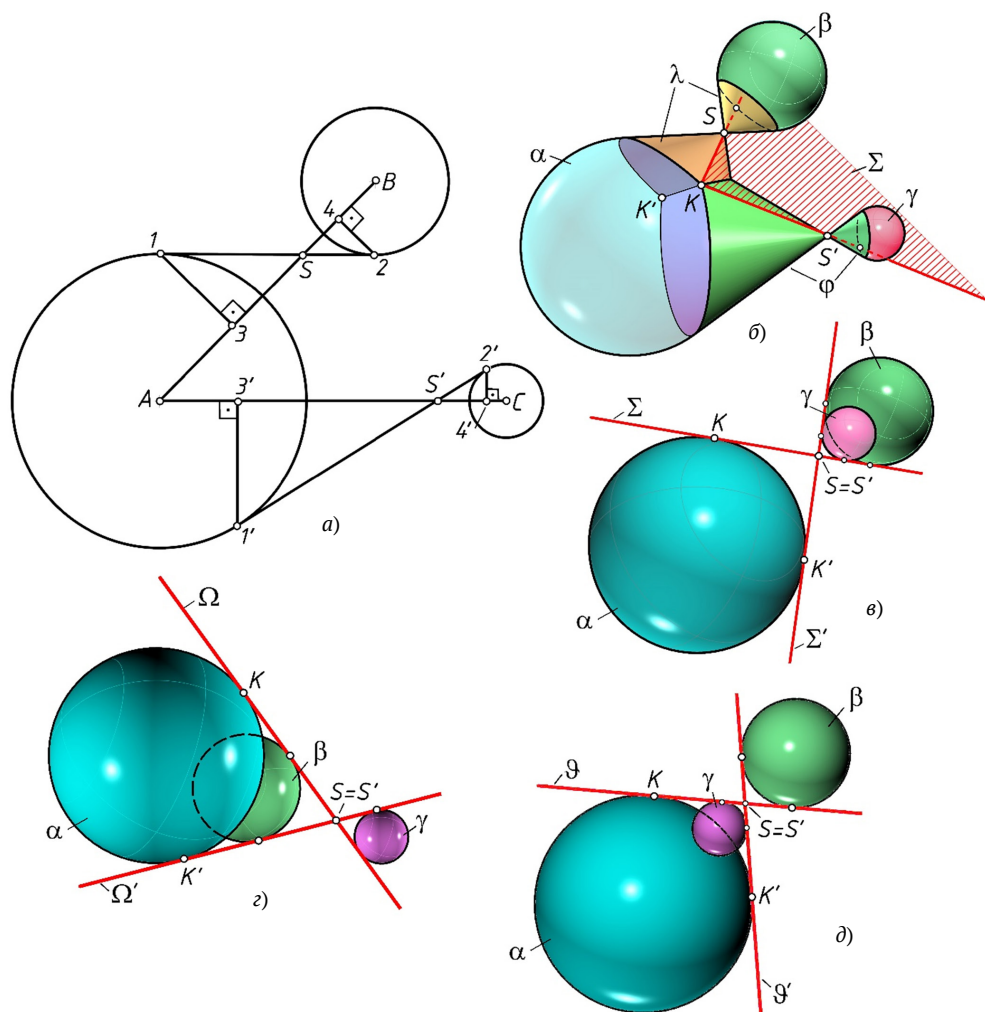


Рис. 9.13. 3D-модель комплексной задачи 12.

Варианты решения: а–в – внутреннее касание конусов; г, д – смешанное касание

В разделе 10.12 приведены алгоритмы построений 3D-моделей и проекционного чертежа, а также рассмотрена теорема Монжа (теорема «о колпаках»), решаемая «выходом в пространство».

- Лектору: откройте файл «Комплексная 12 .dwg» (см. раздел 10.12). По 3D-модели и проекционному чертежу поясните решение задачи. Объясните теорему Монжа.

9.7.2. Плоскость, перпендикулярная заданной плоскости, равнонаклоненная к Π_1 и Π_2 и проходящая через заданную точку

Задача 13. Построить плоскость, перпендикулярную заданной плоскости $\Delta(m \parallel n)$, равнонаклоненную к координатным плоскостям Π_1 и Π_2 и проходящую через точку D (рис. 9.14а).

и один из отрезков d, d' , составляющих углы 45° с Π_1 и Π_2 . Поскольку эти отрезки существуют, то решение также существует.

Количество решений определяется парами отрезков (q, d) и (q, d') , т. е. равно двум.

Алгоритм (рис. 9.14б)

1. В точке D построить перпендикуляр q к плоскости Δ .
2. В точке D построить два отрезка d и d' , расположенных под углом $\pm 45^\circ$ к Π_1 и параллельных плоскости Π_3 .

Плоскости, определяемые парами отрезков (q, d) и (q, d') , перпендикулярны заданной плоскости Δ , поскольку содержат перпендикуляр q к этой плоскости. Они также содержат отрезки d или d' , вследствие этого являются равнонаклоненными к плоскостям Π_1, Π_2 . И наконец, плоскости проходят через точку D . Следовательно, плоскости $\Sigma(q \cap d)$ и $\Sigma'(q \cap d')$ являются решением задачи (рис. 9.14в).

Проверка решения. Следует выполнить две проверки. Первая – убедиться, что найденные плоскости Σ, Σ' перпендикулярны заданной плоскости Δ . Вторая проверка – показать, что найденные плоскости являются равнонаклоненными к плоскостям Π_1, Π_2 .

Для первой проверки можно установить ПСК в заданную плоскость Δ , указать отрезок q и на текстовом экране, выводимом по команде «Список», увидеть сообщение «Угол от плоскости XY: 90° ». Можно, указав отрезок, в панели «Свойства» убедиться, что X, Y -координаты конечных точек отрезка q взаимно равны.

Вторая проверка должна подтвердить парное равенство углов: $\angle(\Sigma, \Pi_1) = \angle(\Sigma, \Pi_2)$, $\angle(\Sigma', \Pi_1) = \angle(\Sigma', \Pi_2)$. Для этого необходимо выполнить дополнительные построения (рис. 9.14в). Углы между плоскостями определяются как углы между перпендикулярами, построенными к этим плоскостям в произвольной точке (см. раздел 7.1.2).

Для проверки плоскости Σ выбрана точка 1 (см. рис. 9.14в). В этой точке построены отрезки перпендикуляров $g \perp \Sigma, v \perp \Pi_1$ и $k \perp \Pi_2$. Угол $\angle(\Sigma, \Pi_1)$ определен как $\angle(g, v)$. Угол $\angle(\Sigma, \Pi_2)$ определен как $\angle(g, k)$. Для измерения каждого угла в его плоскость предварительно устанавливают ПСК и проставляют угловой размер. В приведенном примере измерения подтвердили равенство углов, т. е. плоскость Σ равнонаклоненная к Π_1, Π_2 . Угол наклона составил 62.7° .

Для проверки плоскости Σ' аналогичные построения выполнены в точке 2. Построен отрезок $g' \perp \Sigma'$ и т. д. Показано, что плоскость Σ' также равнонаклоненная к Π_1, Π_2 с углами наклона 49.4° .

Дополнительно продублирована проверка перпендикулярности плоскостей. Определены углы между перпендикулярами к этим плоскостям. Для плоскостей Σ и Δ в точку 1 скопирован отрезок q и определен угол между отрезками q и g . Для плоскостей Σ' и Δ в точке 2 определен угол между перпендикулярами q' и g . Оба угла равны 90° , т. е. и измерения подтвердили, что обе построенные плоскости перпендикулярны заданной плоскости.

В разделе 10.13 приведены алгоритмы построений 3D-модели и решения задачи на проекционном чертеже.

- Лектору: откройте файл «Комплексная 13 .dwg» (см. раздел 10.13). По 3D-модели и проекционному чертежу поясните решение задачи.

9.7.3. Плоскость, проходящая через заданную точку и составляющая с Π_1 и Π_2 заданные углы

Задача 14. Построить плоскость, составляющую с плоскостью Π_1 угол 70° , с плоскостью Π_2 угол 45° и проходящую через заданную точку D .

Анализ. Множество плоскостей, образующих заданный угол с заданной плоскостью, – это плоскости, касательные к поверхности прямого кругового конуса, ось которого перпендикулярна заданной плоскости и угол в основании конуса равен заданному углу.

Исходя из приведенного определения множества и условий задачи следует (рис. 9.15а), что искомая плоскость должна:

- 1) быть касательной к поверхности прямого кругового конуса, назовем его α , у которого вершина находится в заданной точке D , ось перпендикулярна плоскости Π_1 , угол в основании конуса равен 70° ;
- 2) быть также касательной к поверхности второго прямого кругового конуса, назовем его β , с вершиной в той же точке D , с осью, перпендикулярной Π_2 , и имеющего угол в основании, равный 45° .

Исследование. Искомая плоскость должна быть касательной к двум конусам α и β с указанными выше параметрами (рис. 9.15а). Касание плоскости с поверхностью конуса происходит по одной из образующих конуса («касательной образующей»). Поскольку конусы α и β имеют общую вершину в точке D , то касательные образующие конусов пересекаются в этой точке. Плоскость, образованная двумя касательными образующими конусов как прямыми, пересекающимися в точке D , будет искомой общей касательной плоскостью конусов. Следовательно, решение задачи существует.

Для определения количества решений представим поперечное сечение конусов, полученное единой плоскостью (см. рис. 9.15а, б). Положение секущей плоскости может быть произвольным, необходимо лишь, чтобы она пересекала оба конуса. Например, плоскость Δ (рис. 9.15б) рассекает оба конуса по двум эллипсам. В плоскости сечения (рис. 9.15в) к эллипсам построены четыре касательные прямые: две внешние m, m' и две внутренние n, n' . Точки касания вместе с вершиной D определяют касательные образующие конусов и касательные плоскости, являющиеся решением задачи. Это плоскости Σ, Σ' с внешними касательными и плоскости Ω, Ω' с внутренними касательными (рис. 9.15з). Например, касательная (1,2) образует касательную плоскость $\Sigma(D, 1, 2)$. Следовательно, рассматриваемый пример задачи имеет четыре решения. Это максимально возможное количество решений задачи.

Если фигуры сечения в плоскости Δ , а следовательно конусы α и β , пересекаются, то остаются две внешние касательные, и задача будет иметь два решения. При взаимном касании конусов образуются три решения, одно из них – профильно проецирующая плоскость.

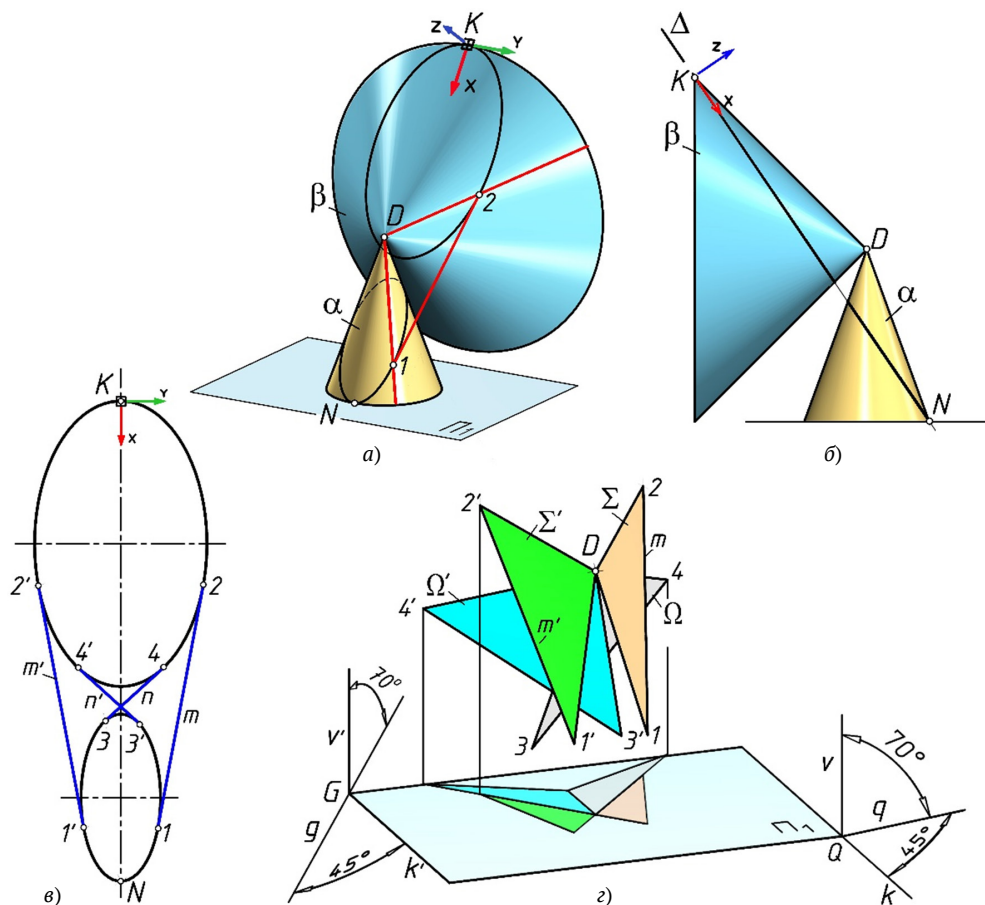


Рис. 9.15. 3D-модель комплексной задачи 14:
 а, б – построение конусов и сечений; в – построение касательных;
 г – касательные плоскости и проверка решения

Алгоритм:

- 1) построить конусы с заданными параметрами (рис. 9.15а);
- 2) построить сечение конусов плоскостью, при которой в сечении образуются два эллипса (рис. 9.15б);
- 3) построить касательные прямые к эллипсам.

Четыре плоскости, образованные вершиной конусов и найденными касательными прямыми, являются решением задачи. На рис. 9.15г найденные плоскости для наглядности показаны в виде треугольников. Плоскости попарно расположены симметрично относительно плоскости симметрии конусов и могут быть построены с применением команды «Зеркало».

Проверка решения. Необходимо определить углы каждой найденной плоскости с плоскостями проекций и убедиться, что значения равны заданным величинам. Углы между плоскостями определяем как углы между перпендику-

лярами к этим плоскостям, построенными в произвольной точке. Из точки Q (рис. 9.152) построены отрезки $q \perp \Sigma$, $v \perp \Pi_1$, $k \perp \Pi_2$. Простановкой угловых размеров в плоскостях (q, v) , (q, k) определены значения углов плоскости Σ . В точке G показано определение углов для плоскости Ω' . Построены отрезки $g \perp \Omega'$, $v' \perp \Pi_1$, $k' \perp \Pi_2$. Значения углов определены простановкой угловых размеров в плоскостях (g, v') , (g, k') . Измеренные значения равны заданным, т. е. задача решена верно.

В разделе 10.14 приведены алгоритмы построений 3D-модели и решение на проекционном чертеже.

- Лектору: откройте файл «Комплексная 14 .dwg» (см. раздел 10.14). По 3D-модели и проекционному чертежу поясните решение задачи.

Вопросы для самоконтроля

1. Какие задачи называют комплексными? Схема решения комплексных задач.
2. Дать определение геометрического места точек, прямых линий и плоскостей. Привести примеры геометрических мест.
3. Как построить точку, если известна одна проекция точки и точка равноудалена от двух заданных точек?
4. Как построить прямую, параллельную двум заданным плоскостям?
5. Как построить прямую, пересекающую две скрещивающиеся прямые?
6. Как построить прямую, перпендикулярную двум скрещивающимся прямым?
7. Алгоритм построения точки, равноудаленной от трех заданных точек и расположенной на заданном расстоянии от четвертой точки.
8. Алгоритм построения точки, расположенной на заданном расстоянии от трех скрещивающихся прямых.
9. Как построить прямую, проходящую через заданную точку, пересекающую заданную прямую и на заданном расстоянии от заданной точки? Сформулировать геометрические множества, реализованные в задаче.
10. Алгоритм построения плоскости, расположенной на заданных расстояниях от трех точек.

глава 10

Приложение к лекции 5: Комплексные задачи

Приведены алгоритмы построения 3D-моделей и чертежей для комплексных задач, рассмотренных в главе 9 (лекция 5).

10.1. Материалы к разделу 9.4.1

Задача 1. Построить точку C , равноудаленную от заданных точек A , B и имеющую фронтальную проекцию C_2 (см. рис. 9.1а).

Построение 3D-модели

Координаты точек в МСК: $A(27.5, 36.7, 38.1)$; $B(68.5, 51.5, 73.1)$; $C_2(65.5, 70, 43.1)$.

- ◆ Создайте файл на основе шаблона, МСК;
- ◆ постройте отрезок AB ;
- ◆ в режиме «ОРТО» из точки C_2 постройте отрезок p , задав его параллельно оси Y и длиной 70;
- ◆ установите ПСК, применив опцию «Z-Ось». Начало координат задайте объектной привязкой «Середина» в середине отрезка AB – в точке D , в качестве второй точки – укажите точку B – плоскость XY заняла положение δ , перпендикулярное отрезку AB в его средней точке D (см. рис. 9.1б);
- ◆ командой «Конвертировать в 2D» постройте проекцию отрезка p на плоскость XY ;
- ◆ поставьте маркер точки в пересечение отрезка p со своей проекцией – это искомая точка C .

Задача решена.

- ◆ Для проверки правильности решения установите ПСК в плоскость Π_2 с началом в точке C_2 (см. рис. 9.1в). Укажите маркеры точки C и C_2 – в панели «Свойства» или командой «Список» сравните X, Y -координаты точек. Они должны быть равными.

- ◆ Постройте отрезки CA и CB и в панели «Свойства» или командой «Список» определите и сравните их длину. Значения тоже должны быть равными.

Решение на проекционном чертеже

Требуется по заданной фронтальной проекции точки C_2 (рис. 10.1) построить ее горизонтальную проекцию C_1 при условии, что точка принадлежит плоскости, перпендикулярной отрезку AB и проходящей через среднюю точку этого отрезка.

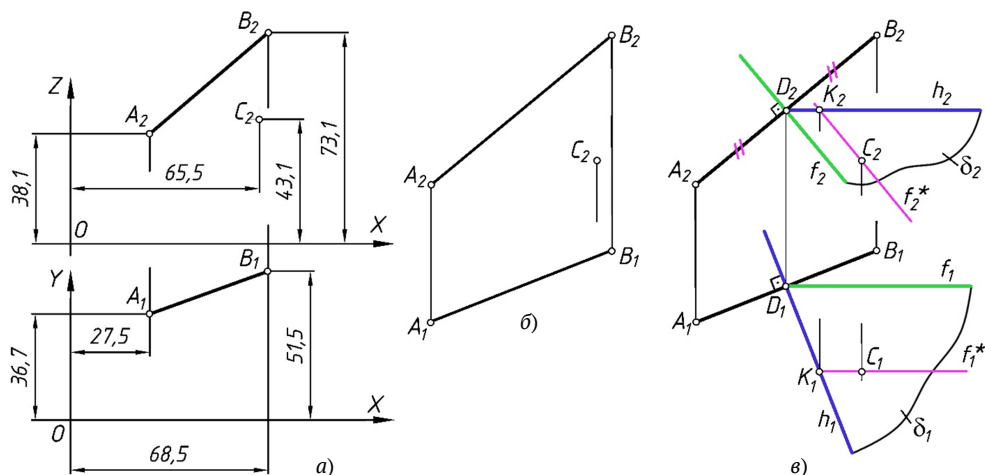


Рис. 10.1. Решение комплексной задачи 1 на проекционном чертеже:
а, б – дано; в – построение

- ◆ Постройте проекции отрезка AB и точки C_2 как исходные данные чертежа. Их можно построить по приведенным выше координатам точек 3D-модели (рис. 10.1а, б) или как 2D-виды с предварительно созданной 3D-модели (см. раздел 8.2).
- ◆ Определите точку D как среднюю точку отрезка AB (рис. 10.1б). Для этого найдите середину фронтальной проекции отрезка, точку D_2 , затем по проекционной связи найдите точку D_1 .
- ◆ Задайте плоскость $\delta \perp AB$, проходящую через точку D . Эту плоскость задайте горизонталью h ($h_1 \perp A_1B_1$) и фронталью f ($f_2 \perp A_2B_2$) – см. раздел 6.8.9. Для того чтобы точка C принадлежала плоскости δ , она должна принадлежать какой-либо прямой этой плоскости. Эту прямую зададим как фронталь f^* . Поскольку все фронталы одной плоскости взаимно параллельны, то:
 - ◆ проведем $f_2^* \parallel f_2$. Зададим точку K_2 , по проекционной связи определяем точку K_1 , через нее проводим горизонтальную проекцию фронталы f_1^* . На этой проекции по проекционной связи с C_2 находим искомую точку C_1 .

Задача решена.

- ◆ Сохраните файл 3D-модели и чертежа с именем «Комплексная 1 .dwg».

10.2. Материалы к разделу 9.4.2

Задача 2. Построить точку F , равноудаленную от вершин треугольника (ABC) и расположенную на расстоянии r от точки D (см. рис. 9.2а).

Построение 3D-модели

Координаты точек в МСК: $A(10.3, 35, 81.1)$; $B(31.2, -10.4, 70.7)$; $C(49.4, 10.7, 102.6)$; $D(47.4, 47.3, 37.3)$, $r = 24.8$.

- ◆ Создайте файл на основе шаблона, МСК;
- ◆ командой «Отрезок» или «3D-полилиния» постройте треугольник (ABC) по приведенным координатам его вершин;
- ◆ ПСК, 3 точки  \ с объектной привязкой укажите вершины треугольника (ABC) – ПСК установлена в плоскости треугольника;
- ◆ Главная \ Черчение \ Окружность, 3 точки  \ с объектной привязкой укажите вершины треугольника (ABC) – построена окружность, в которую вписан треугольник;
- ◆ установите режим «ОРТО»;
- ◆ Отрезок \ с привязкой «Центр» укажите окружность \ переместите курсор вдоль оси Z и введите длину 90 – из центра описанной окружности построен отрезок перпендикуляра p к плоскости треугольника;
- ◆ восстановите МСК;
- ◆ Сфера  \ Центр: введите координаты точки D \ Радиус: введите значение r – построена сфера;
- ◆ 3D-инструменты \ Прямое моделирование \ Сечение  \ Выберите объект: укажите сферу \ 3 точки \ укажите конечные точки отрезка p и угловую точку 1 плоскости Π_1 – построено сечение сферы плоскостью, содержащей отрезок перпендикуляра. Это объект «Область»;
- ◆ Разбивка  \ укажите область сечения сферы – сечение преобразовано в окружность m ;
- ◆ с объектной привязкой «Пересечение» поставьте маркеры точек пересечения отрезка p и окружности m .

Задача решена.

Решение на проекционном чертеже

Требуется построить точку F , принадлежащую перпендикуляру, восстановленному из центра окружности, в которую вписан треугольник (ABC), и расположенную на расстоянии r от точки D (рис. 10.2а).

- ◆ Постройте проекции треугольника (ABC) и точки D .

Если была построена 3D-модель, то проекции исходных объектов, треугольника (ABC) и точки D , можно построить автоматически как 2D-виды (см. раздел 8.2). Иначе вручную, по приведенным выше координатам точек. Решение

потребуется применения трех преобразований чертежа введением дополнительных плоскостей проекций Π_4, Π_5, Π_7 (рис. 10.2б).

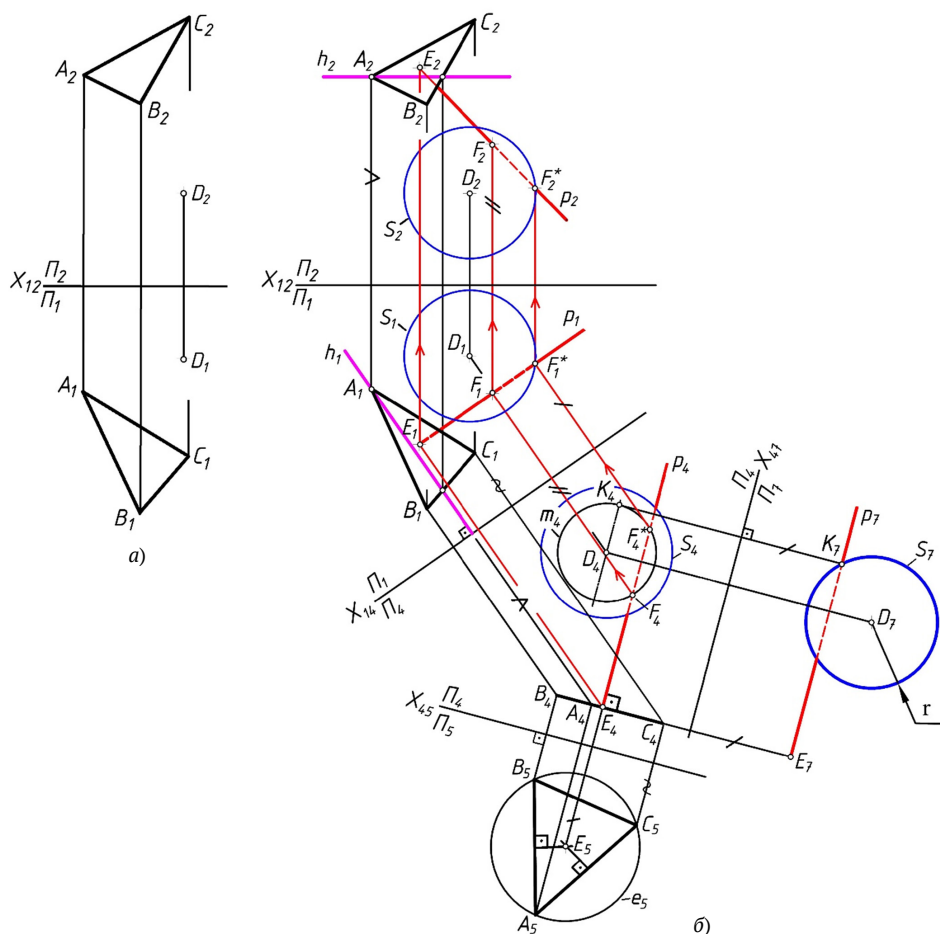


Рис. 10.2. Решение комплексной задачи 2 на проекционном чертеже:
а – дано; б – построение

Для определения центра окружности, в которую вписан треугольник, выполните двойное преобразование чертежа, в результате которого должен быть построен истинный вид треугольника.

Для первого преобразования:

- ♦ в плоскости треугольника (ABC) постройте горизонталь h . Задайте плоскость $\Pi_4 \perp h$. Плоскость треугольника относительно Π_4 стала проецирующей и отобразилась в виде отрезка B_4C_4 .

Для второго преобразования:

- ♦ задайте плоскость $\Pi_5 \parallel B_4C_4$;
- ♦ определите центр окружности – точку E_5 .

В компьютерном варианте для точки E_5 примените команду «Окружность, 3 точки» , в ручном – найдите пересечение двух срединных перпендикуляров, построенных к сторонам треугольника.

Определяем проекции искомых точек F :

- ◆ постройте проекцию p_4 перпендикуляра к плоскости треугольника ABC ;
- ◆ введите следующую плоскость проекции $\Pi_7 \parallel p_4$;
- ◆ постройте проекцию перпендикуляра p_7 и сферы S_7 . По точке K_7 постройте окружность сечения сферы m_4 . На пересечении m_4 и p_4 найдите проекции точек F_4 и F_4^* пересечения перпендикуляра p со сферой S ;
- ◆ обратными построениями (показаны красными линиями) определите горизонтальные и фронтальные проекции найденных точек F и F^* .

Задача решена.

- ◆ Сохраните файл 3D-модели и чертежа с именем «Комплексная 2.dwg».

10.3. Материалы к разделу 9.4.3

Задача 3. Построить точку, равноудаленную от точек A и B , отстоящую от точки C на 50 мм, а от плоскости $\Delta(KLM)$ на расстояние 30 мм (см. рис. 9.3а).

Построение 3D-модели

Координаты точек в МСК: $A(23.9, 32.3, 42)$; $B(36.1, 16.1, 63.3)$; $C(41.4, 37.9, 32.8)$; $K(45.2, 32.5, 32.4)$; $L(77.4, 44.3, 37.5)$; $M(64, 23.1, 54)$, сфера $R50$, расстояние между плоскостями 30.

Исходные данные (см. рис. 9.3а):

- ◆ создайте файл на основе шаблона, МСК, Визуальный стиль «Концептуальный»;
- ◆ Отрезок  \ введите координаты точки A \ координаты точки B – построен отрезок AB ;
- ◆ Отрезок \ последовательно введите координаты точек K, L, M \ Замкнуть – построен треугольник $\Delta(KLM)$;
- ◆ Точка  \ введите координаты точки C – проставлен маркер точки.

Постройте прямоугольник плоскости α :

- ◆ ПСК, Z-ось  \ Укажите начало ПСК: с объектной привязкой «Середина» укажите отрезок AB \ Точка на положительном луче оси Z : укажите точку B – ПСК установлена в плоскость α ;
- ◆ Прямоугольник из центра  \ Центр: 0,0 \ Второй угол: 7.5,7 – построен прямоугольник, как на рис. 9.3а.

Для повышения наглядности модели можно построить прямоугольник плоскости α увеличенных размеров:

- ◆ Прямоугольник по 2 точкам  \ Первый угол: -35,-68 \ Второй угол: 69,24.

Построим треугольники Δ' и Δ'' :

- ◆ ПСК, 3 точки  \ Последовательно укажите точки K, L, M – ПСК установлена в плоскость Δ ;
- ◆ включите режим «ОРТО»;
- ◆ Копировать  \ укажите все ребра треугольника $\Delta(KLM)$ \ Перемещение \ потяните курсор вдоль оси Z и введите 30 – построен треугольник Δ' ;
- ◆ повторите копирование $\Delta(KLM)$ в противоположную сторону, также вдоль оси Z на величину 30 – построен треугольник Δ'' .

Построим сферу S и окружности m, n, g (см. рис. 9.3б, в):

- ◆ восстановите МСК ;
- ◆ 3D-инструменты \ Прямое моделирование \ Сфера  \ Центр: с привязкой «Узел» укажите маркер точки C \ Радиус: 50 – построена Сфера (см. рис. 9.3б);
- ◆ 3D-инструменты \ Прямое моделирование \ Сечение  \ Выберите объекты: укажите сферу \ 3 точки \ с объектной привязкой «Конточка» укажите три угловые точки прямоугольника плоскости α – построено сечение сферы как область;
- ◆ Разбивка  \ укажите сечение – область преобразована в окружность m ;
- ◆ Через панель «Свойства» придайте сфере прозрачность 30...60 %;
- ◆ Сечение  \ укажите сферу \ 3 точки \ с объектной привязкой «Конточка» укажите три угловые точки треугольника Δ' – построено сечение как «Область», примените к области команду «Разбивка» – построена окружность n ;
- ◆ постройте сечение сферы плоскостью Δ'' – получена окружность g ;
- ◆ скройте сферу. С привязкой «Пересечение» поставьте маркеры в точки пересечения окружностей.

Получено решение по алгоритму 1.

Для решения по алгоритму 2 необходимо построить линии пересечения плоскости α с плоскостями треугольников Δ' и Δ'' (см. рис. 9.3г). Для этого из треугольников создадим объекты «Поверхность» и построим их сечения плоскостью α (см. также раздел 5.7.2).

Построим пересечение α и Δ' :

- ◆ установите МСК;
- ◆ 3D-инструменты \ Прямое моделирование \ Выдавливание  \ укажите одну из сторон треугольника Δ' \ опция «Траектория» \ укажите другую сторону треугольника – в плоскости треугольника построен сектор поверхности в виде параллелограмма;
- ◆ Сечение  \ Выберите объекты: укажите сектор поверхности \ опция «3 точки» \ с объектной привязкой укажите три вершины прямоугольника α – построен отрезок d линии пересечения плоскостей;

- ◆ за ручки удлините отрезок в обе стороны так, чтобы он пересек окружность m ;
- ◆ с объектной привязкой «Пересечение» поставьте маркеры в точки пересечения отрезка d с окружностью m . Это две искомые точки, являющиеся решением задачи;
- ◆ повторите построения для треугольника Δ'' , найдите отрезок d' и две точки его пересечения с окружностью m . Это еще две искомые точки, являющиеся решением задачи.

Для решения по алгоритму 3 (см. рис. 9.3д) необходимо построить проекции окружности m на плоскости треугольников Δ' , Δ'' . Для плоскости Δ' :

- ◆ ПСК, 3 точки  с объектной привязкой укажите вершины треугольника Δ' – ПСК установлена в плоскости треугольника;
- ◆ Копирование  \ укажите окружность m \ Перемещение \ 0,0 – создан дубликат окружности;
- ◆  \ Утилиты \ Конвертирование в 2D \ укажите окружность m – в плоскости Δ' построен эллипс e ;
- ◆ с объектной привязкой «Пересечение» поставьте маркеры в точки пересечения эллипса окружностью m . Это две искомые точки, являющиеся решением задачи;
- ◆ постройте проекцию окружности m на плоскость Δ'' и определите еще две искомые точки, являющиеся решением задачи.

Для оформления модели создайте из треугольников Δ' , Δ'' и прямоугольников α области, придайте объектам модели цвет и прозрачность, настройте источники света.

Решение на проекционном чертеже

Требуется построить точку, которая равноудалена от концов отрезка AB , расположена на расстоянии 50 мм от точки C и на расстоянии 30 мм от плоскости треугольника $\Delta(KLM)$.

В разделе 9.4.3 (см. рис. 9.3) приведено три компьютерных 3D-алгоритма решения этой задачи. Каждый из них предполагает построение одной или нескольких окружностей сечения сферы и операции с ними: определение точек их взаимного пересечения, пересечение с прямыми линиями или проецирование окружности на плоскость. Если в компьютерном 3D-варианте эти операции без затруднений выполняются средствами Платформы nanoCAD, то на проекционном чертеже эти операции требуют для каждой окружности построений ее истинного вида, что предполагает выполнение двух преобразований чертежа. Поэтому для решения на проекционном чертеже выбираем алгоритм 2, в котором требуется построение и преобразование лишь одной окружности (см. рис. 9.3г). Но и в алгоритме 2, в рассматриваемой задаче, чертеж получается чрезвычайно сложным для решения и восприятия [11, с. 23]. Поэтому разделим построения на четыре этапа, т. е. на четыре чертежа. Связь между чертежами-этапами реализуем через общий элемент исходных данных – проекции отрезка AB .

Построение исходных данных (рис. 10.3а). Чертеж можно выполнять как в пространстве Модели так и на Листе:

- ◆ постройте проекции отрезка AB , точки C и треугольника $\Delta (KLM)$. Проекцию можно построить по 3D-модели как 2D-виды (см. раздел 8.2) или по приведенным выше координатам точек (см. пример рис. 10.1а).

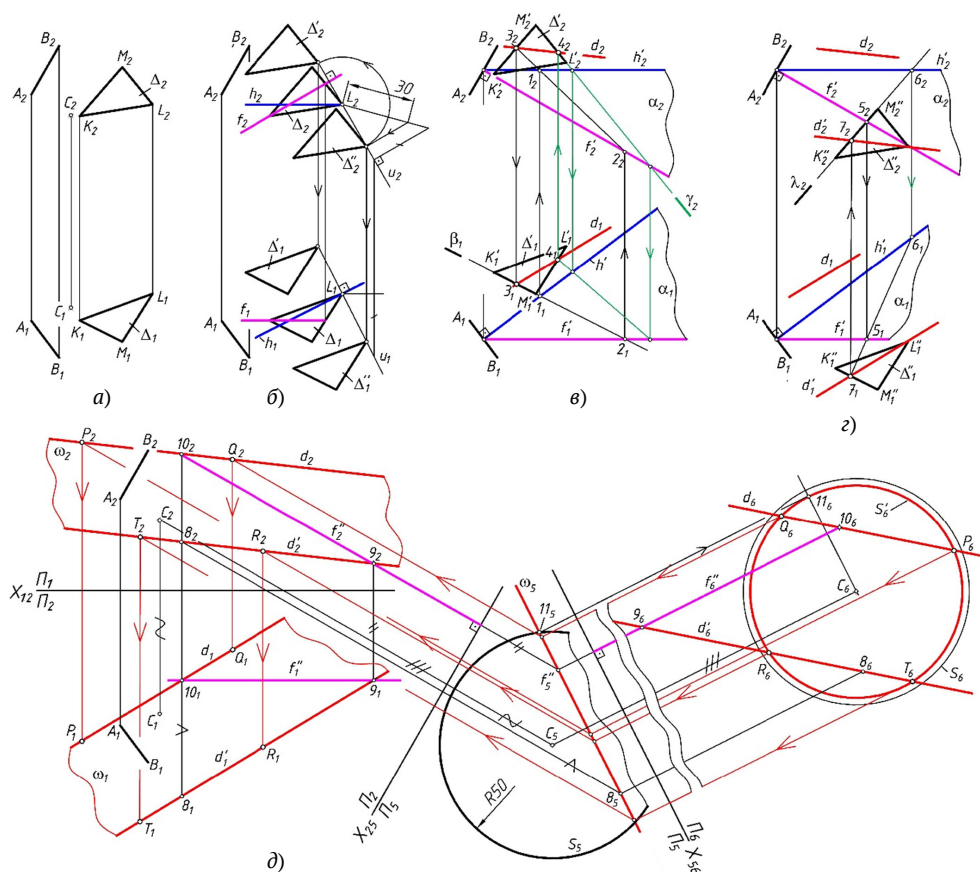


Рис. 10.3. Решение комплексной задачи 3 на проекционном чертеже:
а – дано; б – построение треугольников; в, г – пересечение треугольников с плоскостью α ;
д – пересечение прямых со сферой

Чертеж 1 (рис. 10.3б) – построение треугольников Δ' и Δ'' , расположенных на расстоянии 30 мм в обе стороны от треугольника $\Delta (KLM)$:

- ◆ на свободное поле скопируйте проекции отрезка AB и треугольника Δ ;
- ◆ в треугольнике Δ постройте горизонталь h и фронталь f , на их основе из вершины L восстановите перпендикуляр u к плоскости Δ (см. раздел 6.8.5);
- ◆ применив способ прямоугольного треугольника (см. раздел 7.2.3), отложите на отрезке u в обе стороны по 30 мм и постройте проекции треугольников Δ' и Δ'' , каждый из которых параллелен заданному Δ .

Чертеж 2 (рис. 10.3в) – создание плоскости α , перпендикулярной отрезку AB и проходящей через его среднюю точку. Построение отрезка прямой d пересечения плоскости α с плоскостью треугольника Δ' :

- ◆ на свободное поле скопируйте проекции отрезка AB и треугольника Δ' ;
- ◆ для задания плоскости α в средней точке отрезка AB постройте горизонталь h' , у которой $h'_1 \perp A_1B_1$. Постройте фронталь f' , у которой $f'_2 \perp A_2B_2$.

Линию пересечения d (3, 4) найдем в результате двукратного решения первой позиционной задачи (см. раздел 6.4). Найдем пересечение ребра $K'M'$ с плоскостью α :

- ◆ через $K'M'$ вводим плоскость $\beta \perp \Pi_1$, по точкам 1, 2 находим линию пересечения плоскостей β и α и по ней находим точку 3;
- ◆ через $M'L'$ вводим плоскость $\gamma \perp \Pi_2$, находим ее пересечение с плоскостью α и точку 4.

Чертеж 3 (рис. 10.3г) – построение отрезка d' пересечения плоскости α с плоскостью треугольника Δ'' . Поскольку треугольники $\Delta' \parallel \Delta''$, то $d' \parallel d$. Поэтому достаточно найти одну точку отрезка d' и построить его проекции параллельно проекциям найденного отрезка d . Найдем точку 7 пересечения отрезка $K''M''$ с плоскостью α :

- ◆ на свободное поле скопируем проекции отрезка AB , треугольника Δ'' и отрезков h', f', d ;
- ◆ введем плоскость $\lambda \supset K''M''$, $\lambda \perp \Pi_2$. По точкам 5, 6 строим линию пересечения $\lambda \cap \alpha(h', f')$ и находим точку 7;
- ◆ через точку 7 проводим проекции $d' \parallel d$.

Чертеж 4 (рис. 10.3д) – построение точек пересечения прямых d, d' с поверхностью сферы S как искомым точек решаемой задачи.

- ◆ На свободное поле скопируйте проекции отрезка AB , отрезков d, d' и точки C .

Рассмотрим плоскость ω , задав ее параллельными прямыми d, d' . Преобразуем чертеж так, чтобы плоскость ω стала проецирующей. Для этого введем дополнительную плоскость $\Pi_5 \perp f''$ и $\Pi_5 \perp \Pi_2$:

- ◆ в плоскости ω постройте фронталь f'' , задав ее точками 9, 10;
- ◆ постройте оси X_{12} и $X_{25} \perp f'_2$. Постройте проекцию точки C_5 и проекцию сферы – окружность S_5 ;
- ◆ на прямой d' произвольно задайте точку 8. По проекциям f''_5 и 8_5 постройте проекцию плоскости ω_5 , задав ее отрезком прямой;
- ◆ введем дополнительную плоскость $\Pi_6 \parallel \omega$. По точкам 8_6 и 9_6 построим прямую d'_6 ;
- ◆ через точку 10_6 параллельно d'_6 построим прямую d_6 ;
- ◆ построим окружность S'_6 сечения сферы S плоскостью ω . Радиус этой окружности определяет проекция точки 11_6 ;
- ◆ обозначаем маркерами четыре точки пересечения прямых d'_6 и d_6 с окружностью сечения S'_6 : P_6, Q_6, R_6, T_6 . Это проекции искомым точек, являющихся решением задачи;

- ♦ обратными построениями находим фронтальные и горизонтальные проекции искомых точек;
- ♦ сохраните файл 3D-модели и чертежа с именем «Комплексная 3.dwg».

10.4. Материалы к разделу 9.4.4

Задача 4. Построить точку, удаленную на заданное расстояние r от трех скрещивающихся прямых a, b, c (см. рис. 9.4а).

Построение 3D-модели

Отрезки a, b, c заданы как диагонали шаблона. Координаты конечных точек отрезков в МСК: $a((0, 70, 70)(100, 70, 0))$; $b((0, 70, 0)(100, 0, 0))$; $c(0, 0, 0)(100, 70, 70))$. Расстояние от искомой точки до каждого отрезка $r = 30$.

- ♦ Создайте файл на основе шаблона, МСК, Визуальный стиль «Концептуальный»;
- ♦ постройте отрезки a, b, c , вводя приведенные координаты конечных точек либо указывая соответствующие угловые точки шаблона;
- ♦ координатные плоскости можно скрыть.

Построим цилиндры радиусом 30 с осями, заданными отрезками a, b, c :

- ♦ 3D-инструменты \ Прямое моделирование \ Цилиндр  \ Центр основания: укажите одну из конечных точек отрезка a \ Радиус: 30 \ опция «Конечная точка оси»: укажите вторую конечную точку оси – построен цилиндр с осью, заданной отрезком a ;
- ♦ постройте два других цилиндра (см. рис. 9.4б).

Строим линию пересечения цилиндров:

- ♦ 3D-инструменты \ Булевы операции \ Объединение  \ укажите все цилиндры – образовалась линия пересечения трех цилиндров;
- ♦ установите визуальный стиль «2D каркас» – видна линия пересечения цилиндров;
- ♦ 3D-инструменты \ Прямое моделирование \ Редактировать тело  \ Задайте параметр редактирования \ Ребро \ Копировать \ Выберите ребро: с привязкой «Ближайшая» укажите все сегменты линии пересечения \ Укажите базовую точку или смещение: 0,0 \ \ \ создан дубликат линии пересечения из нескольких звеньев как объектов «Сплайн»;
- ♦ укажите объединенные цилиндры \ Клик ПКМ \ Изолировать \ Скрыть объекты – осталась только линия пересечения (рис. 9.4в);
- ♦ если выявлены пропущенные сегменты линии, восстановите объект и дополните линию;
- ♦ вращайте   изображение и найдите на линии пересечения точки состыковки секторов линии. Поставьте в эти точки маркеры – это искомые точки, являющиеся решением задачи;

- ◆ для проверки правильности решения постройте из каждой найденной точки по три отрезка как перпендикуляры с привязкой «Нормаль» к заданным отрезкам скрещивающихся прямых (см. рис. 9.4з);
- ◆ через функциональную панель «Свойства» определите длину каждого отрезка – она должна быть равна 30.

Постройте касательные сферы (см. рис. 9.4д):

- ◆ 3D-инструменты \ Прямое моделирование \ Сфера  \ Центр: укажите маркер одной из найденных точек \ Радиус: с привязкой «Конточка» укажите конечную точку одного из отрезков перпендикуляров, проведенных из этой точки, – построена касательная сфера;
- ◆ через панель «Свойства» придайте сфере прозрачность 50;
- ◆ постройте сферу с центром во второй найденной точке;
- ◆ придайте модели наглядность и сохраните файл с именем «Комплексная 4.dwg».

Решение на проекционном чертеже

Требуется построить точку, которая удалена на 30 мм от трех скрещивающихся прямых.

Алгоритм решения: найти точки пересечения трех цилиндров, имеющих радиус 30 и оси – заданные скрещивающиеся прямые. Для этого найти линию пересечения двух цилиндров, затем найти точки пересечения линии с поверхностью третьего цилиндра.

Решение приведено на рис. 10.4. Построены фронтальная и горизонтальная проекции трех отрезков скрещивающихся прямых, являющихся диагоналями двух сторон параллелепипеда и его диагональю. Параллелепипед задан гранями шаблона, координаты концов отрезков приведены выше, при построении 3D-модели.

Для построения линии пересечения v выбраны два цилиндра: α (ось – отрезок a) и β (ось – отрезок b). Введена дополнительная плоскость Π_4 так, чтобы цилиндр β стал проецирующим в виде окружности β_4 . При этом линия пересечения этих цилиндров отображена в виде дуги v_4 .

Введена дополнительная плоскость Π_5 , заданная параллельно оси цилиндра α – отрезку a . Построена проекция линии пересечения цилиндров α и β на эту плоскость v_5 . Это кривая четвертого порядка, построение которой выполнено способом секущих плоскостей. Секущие плоскости δ заданы параллельными осям цилиндров, т. е. отрезкам a и b . На плоскости Π_5 цилиндры отображены в виде прямоугольников α_5 и β_5 . Как пример показано построение десяти точек линии v_5 . Это по две точки на осях проекций цилиндров α , β – отрезках a_5 , b_5 – и восемь точек, образованных секущими плоскостями δ и δ' . Для достижения необходимой точности количество секущих плоскостей δ должно быть не менее пяти.

Для определения точек пересечения третьего цилиндра γ с найденной линией v выполнены еще два преобразования чертежа, необходимых для того, чтобы цилиндр γ стал проецирующим. Для этого введена дополнительная плоскость Π_7 ,

на которой ось цилиндра (отрезок c) стала прямой уровня. Затем введена плоскость Π_6 , на которую эта ось отобразилась в точку c_6 . Вместе с осью цилиндра выполнено преобразование линии v . Ее проекция v_7 построена по координатам точек v_4 и v_5 . Проекция v_6 – по координатам v_4 и v_7 . Примером является построение точек $1_6, 1_7$. Остальные точки кривых v_6 и v_7 построены аналогично.

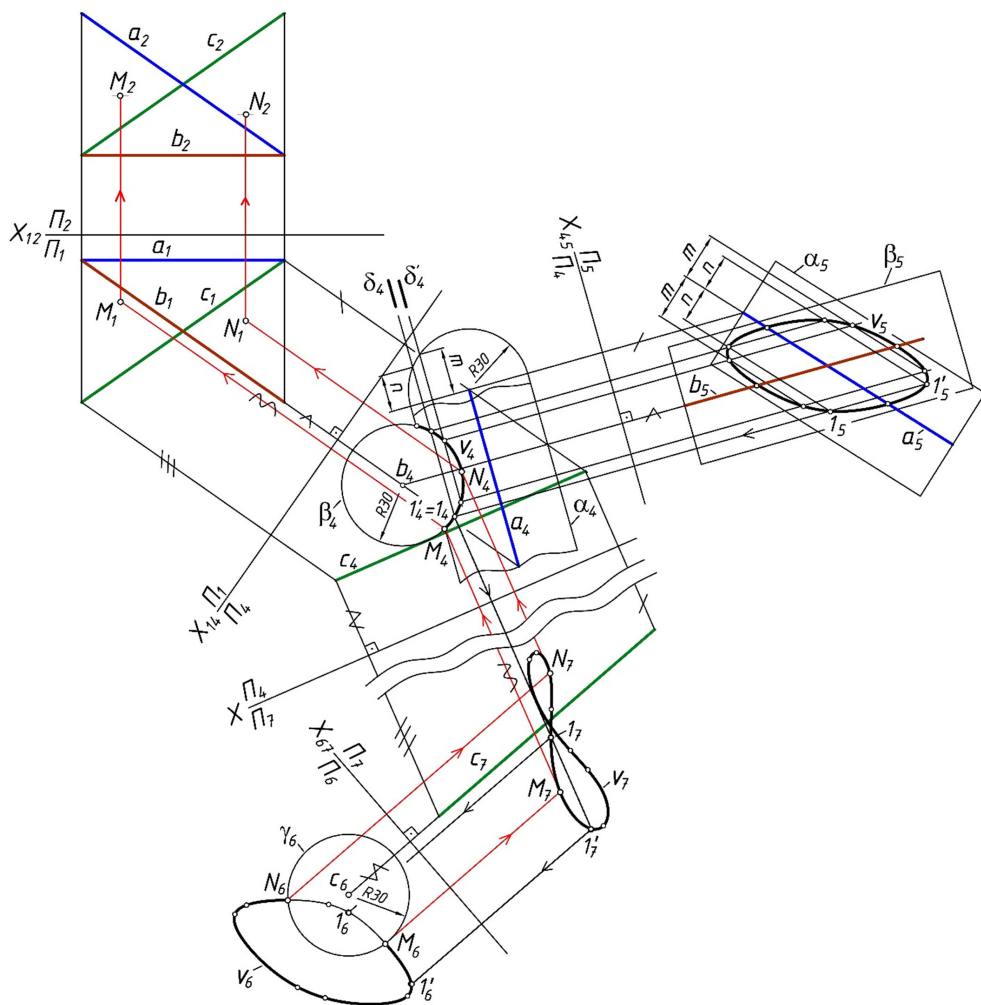


Рис. 10.4. Решение комплексной задачи 4 на проекционном чертеже

На плоскости Π_6 найдены проекции M_6, N_6 искомых точек пересечения трех цилиндров. Обратными построениями определены проекции этих точек на Π_1 и Π_2 , т. е. задача решена.

Приведенный на рис. 10.4 чертеж получен в режиме автоматического построения по 3D-модели как набор 2D-видов (см. раздел 8.2). Его «ручное» построение даже в компьютерном 2D-варианте требует весьма трудоемкого построения

трех сложных линий пересечения и связано со снижением точности решения. Сложным является и восприятие этого чертежа, и его низкая наглядность.

- ◆ Если чертеж был выполнен в компьютерном варианте, внесите его в файл «Комплексная 4.dwg».

10.5. Материалы к разделу 9.5.1

Задача 5. Определить ГМТ, равноудаленных от трех скрещивающихся прямых a , b , c (см. рис. 9.4а).

- ◆ Создайте файл на основе шаблона;
- ◆ из файла «Комплексная 4.dwg» скопируйте через буфер памяти три цилиндра (см. рис. 9.4б), построение которых приведено в разделе 10.4;
- ◆ управляя ручками цилиндров, установите длину каждого 400...500 мм (см. рис. 9.5а) – это три исходных цилиндра.

Цикл построения:

- ◆ Копирование  \ укажите исходные цилиндры \ Перемещение \ 0,0,0 – созданы дубликаты цилиндров;
- ◆ создайте новый слой и перенесите на него дубликаты цилиндров. Исходные цилиндры временно скройте;
- ◆ укажите дубликаты трех цилиндров и в панели «Свойства» задайте им одинаковое необходимое значение радиуса, например $r = 30$;
- ◆ 3D-инструменты \ Булевы операции \ Пересечение  \ укажите три цилиндра – получен солид-объект пересечения (см. рис. 9.5б);
- ◆ поставьте маркеры точек в точках пересечения ребер солид-объекта;
- ◆ создайте новый слой для точек и переместите маркеры на новый слой;
- ◆ удалите солид-объект пересечения;
- ◆ восстановите видимость исходных цилиндров;
- ◆ для каждой новой точки и нового значения r повторите цикл построения.

Построение линии s

Построенные маркеры точек соедините плавной линией:

- ◆ Построение \ Сплайн по определяющим точкам  \ с объектной привязкой «Узел» укажите маркеры точек \ \ – построена линия s (см. рис. 9.5в).

Завершение модели:

- ◆ из файла «Комплексная 4.dwg» скопируйте через буфер памяти отрезки трех пересекающихся прямых a , b , c ;
- ◆ Копирование  \ Создайте дубликат линии s ;
- ◆  \ Утилиты \ Конвертирование в 2D \ укажите линию s – построена проекция линии на плоскость Π ;
- ◆ для наглядности постройте одну из касательных сфер и отрезки вертикальных проецирующих прямых;
- ◆ сохраните модель в файле «Комплексная 5.dwg».

10.6. Материалы к разделу 9.5.2

Задача 6. В задаче 4 о построении точек, равноудаленных от трех скрещивающихся прямых, построить 3D-модели, в которых количество решений составляет 0, 1, 3, 4.

- ◆ Создайте файл на основе шаблона; МСК, визуальный стиль «Концептуальный»;
- ◆ из файла «Комплексная 4 .dwg» скопируйте через буфер памяти три цилиндра (см. рис. 9.4б), построение которых приведено в разделе 10.4. Также скопируйте три отрезка скрещивающихся прямых. Слой с отрезками заморозьте;
- ◆ управляя ручками цилиндров, установите длину каждого 170...200 мм;
- ◆ 3D-инструменты \ Булевы операции \ Объединение  \ укажите цилиндры с осями a , b (желтый и голубой);
- ◆ через панель «Свойства» придайте всем трем цилиндрам прозрачность 70;
- ◆ три подготовленных цилиндра, включая два объединенных, скопируйте на новый слой. Это исходные цилиндры.

Решение для двух точек (рис. 9.6а):

- ◆ создайте новый видовой экран и скопируйте в него исходные цилиндры;
- ◆ установите ПСК , задав положение оси по центральным точкам оснований зеленого цилиндра;
- ◆ с командной строки выполните команду «План» – установлен вид, в котором зеленый цилиндр отображен в виде окружности; видна линия v пересечения желтого и голубого цилиндров и две точки M , N пересечения трех цилиндров.

Если объединить три цилиндра, будет получено решение с двумя точками, приведенное в задаче 4.

Решение для четырех точек (рис. 9.6б):

- ◆ создайте новый видовой экран и скопируйте в него исходные цилиндры;
- ◆ вновь установите вид, в котором зеленый цилиндр показан проецирующим;
- ◆ переместите зеленый цилиндр так, чтобы образовались четыре точки пересечения;
- ◆ объедините цилиндры  и применением команд «Орбита»   постройте наглядное изображение цилиндров с линией пересечения (см. рис. 9.6в);
- ◆ установите МСК и командой «Редактировать тело»  скопируйте линию пересечения (см. рис. 9.6г). Пример копирования – см. выше, раздел 10.4, задача 4;
- ◆ отобразите линию в новом видовом экране. Восстановите изображение отрезков осей. Из точки Q опустите перпендикуляры на эти отрезки (см. рис. 9.6г);

- ◆ укажите отрезки перпендикуляров и в панели «Свойства» найдите строку «Длина». Значение должно быть единым для всех трех отрезков.

Решение для трех точек (рис. 9.6д, е, ж):

- ◆ в новом видовом экране раскройте слой с исходными цилиндрами, установите вид (см. рис. 9.6а);
- ◆ установите зеленый цилиндр с касанием двух других цилиндров в точке F линии v .

Добиться касания сложно. Поэтому, увеличивая изображение, можно ограничиться пересечением вблизи точки A с длиной участка пересечения не более 0.5 мм.

- ◆ Дальнейшие построения выполните, как в варианте с четырьмя точками.
- ◆ Сохраните модель в файле «Комплексная 6 .dwg».

10.7. Материалы к разделу 9.6.1

Задача 7. Построить отрезок прямой m , проходящий через заданную точку M и параллельный двум заданным плоскостям $\Sigma(a, b)$ и $\Delta(c, d)$ (см. рис. 9.7а).

Построение 3D-модели

Координаты конечных точек отрезков и точки в МСК (см. рис. 9.7а): отрезки a, b : (5, 32.8, 61.5)(28, 45.8, 29.5) – это общая точка, (12, 26.8, 36.5); отрезки c, d : (89, 50.8, 55.5)(67, 45.8, 29.5) – это их общая точка, (87, 26.8, 37.5). Точка M : (50, 25.8, 47.5).

- ◆ Создайте файл на основе шаблона; МСК, визуальный стиль «Концептуальный»;
- ◆ по приведенным координатам конечных точек постройте отрезки a, b и c, d , поставьте маркер точки M по ее координатам.

Решение по алгоритму 1:

- ◆ скопируйте отрезки a, b , задав базовой точку 1, конечной точкой укажите маркер точки M – построена плоскость $\Sigma'(a' \cap b')$ (см. рис. 9.7б);
- ◆ повторите копирование для отрезков c, d , задав базовой точку 2, – построена плоскость $\Delta'(c' \cap d')$;
- ◆ 3D-инструменты \ Прямое моделирование \ Выдавливание  \ Выберите объекты для выдавливания: укажите отрезок a' \ опция «Траектория» \ укажите отрезок b' – в плоскости Σ' построен сектор поверхности в виде параллелограмма;
- ◆ Сечение  \ Выберите объекты: укажите сектор поверхности \ опция «3 точки» \ с объектной привязкой «Конточка» укажите три конечные точки отрезков c', d' – построен отрезок m линии пересечения плоскостей, являющийся решением задачи;
- ◆ придайте модели наглядность. За ручки удлините отрезок m в обе стороны. Создайте области для плоскостей Σ' и Δ' . Постройте проекции прямых и областей на плоскость Π_1 .

Решение по алгоритму 2:

- ◆ Выдавливание  \ Выберите объекты: укажите отрезок a \ опция «Траектория» \ укажите отрезок b – в плоскости Σ построен сектор поверхности в виде параллелограмма;
- ◆ Сечение  \ Выберите объекты: укажите сектор поверхности \ опция «3 точки» \ с объектной привязкой «Конточка» укажите три конечные точки отрезков c, d – построен отрезок m' линии пересечения плоскостей Σ и Δ ;
- ◆ скопируйте отрезок m' , указав базовой точкой любую, например среднюю, точку отрезка, конечной точкой укажите маркер точки M – построен отрезок t , являющийся решением задачи;
- ◆ для наглядности за ручки удлините отрезок t в обе стороны. Постройте проекции прямых на Π_1 .

Решение на проекционном чертеже

Чертеж выполним на компьютере или карандашом на бумаге.

- ◆ По координатам, приведенным для 3D-модели (см. выше), постройте проекции отрезков a, b и c, d , а также точки M (рис. 10.5а).
- ◆ Скопируйте проекции отрезков, совместив общие точки каждой пары с одноименными проекциями точки M , – построены проекции плоскостей Σ' и Δ' .

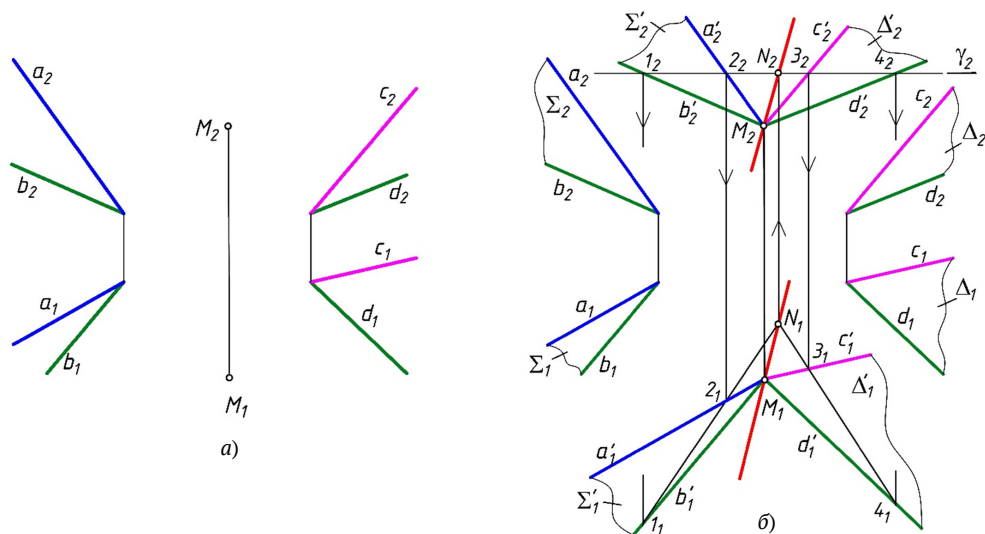


Рис. 10.5. Решение комплексной задачи 7 на проекционном чертеже:
а – дано; б – чертеж

Необходимо построить линию пересечения плоскостей Σ' и Δ' . Поскольку линия пересечения прямая, то достаточно найти две ее точки. Одной из них является точка M как общая точка этих плоскостей. Для построения второй точки применим алгоритм второй позиционной задачи (см. раздел 6.6.3, рис. 6.3б):

- ◆ вводим вспомогательную секущую плоскость γ (в данном примере это горизонтальная плоскость уровня);
- ◆ определяем точки 1–4 пересечения γ с плоскостями Σ' и Δ' . На пересечении отрезков $1,2_1$ и $3,4_1$ находим точку N_1 ;
- ◆ по проекционной связи в плоскости γ находим точку N_2 ;
- ◆ строим отрезки M_1N_1 и M_2N_2 , которые являются решением задачи;
- ◆ сохраните построения 3D-модели и чертежа в файле «Комплексная 7.dwg».

10.8. Материалы к разделу 9.6.2

Задача 8. Построить прямую m , проходящую через заданную точку M и пересекающую две заданные скрещивающиеся прямые a, b (рис. 9.8а).

Построение 3D-модели

Координаты конечных точек отрезков и точки в МСК (см. рис. 9.8а): отрезок $a((17.4, 45.8, 30.4)(44.4, 17.8, 55.4))$; отрезок $b((27.4, 20.8, 30.4)(72.4, 52.8, 50.4))$; точка $M(83.4, 31.8, 39.4)$.

- ◆ Создайте файл на основе шаблона; МСК, визуальный стиль «Концептуальный»;
- ◆ по приведенным координатам конечных точек постройте отрезки a, b , поставьте маркер точки M по ее координатам.

Решение по алгоритму 1 (см. рис. 9.8б)

- ◆ По конечным точкам отрезка a и точке M постройте замкнутую 3D-полилинию ;
- ◆ 3D-инструменты \ Прямое моделирование \ Выдавливание  \ Выберите объекты для выдавливания: укажите 3D-полилинию \ Укажите высоту выдавливания: 0.001 – по контуру полилинии построен солид плоскости Σ ;
- ◆ повторите построение для отрезка b и точки M – построен солид плоскости Δ ;
- ◆ 3D-инструменты \ Булевы операции \ Объединение  \ укажите солиды плоскостей Σ и Δ , получена линия пересечения треугольников MK , являющаяся решением задачи;
- ◆ по точкам M, K с объектной привязкой «Конточка» постройте отрезок m и ручками удлините его до пересечения с отрезком a в точке N (см. рис. 9.8в).

Решение по алгоритму 2 (см. рис. 9.8в)

- ◆ Установите ПСК по трем точкам : две конечные точки отрезка a и точка M – плоскость XY установлена в плоскость Σ ;
- ◆ командой «Конвертирование в 2D» постройте проекцию отрезка b на плоскость ПСК;
- ◆ поставьте маркер в точке пересечения отрезка b и его проекции – это точка K ;

- ♦ постройте отрезок MK и за ручки вытяните его до пересечения с точкой N – это искомая линия, являющаяся решением задачи.

Алгоритм решения в символьной форме

Приведем символьную запись алгоритма 1.

Дано: $a \div b; M$. Построить прямую $m \supset M, m \cap a, m \cap b$.

Анализ:

$$1) \{m: (m \supset M, m \cap a)\} \Rightarrow \Sigma(a, M);$$

$$2) \{m: (m \supset M, m \cap b)\} \Rightarrow \Delta(b, M).$$

Исследование:

$m = \Sigma \cap \Delta$ – единственное решение.

Алгоритм 1 (рис. 9.8б):

$$1) \Sigma(a, M);$$

$$2) \Delta(b, M);$$

$$3) m = \Sigma \cap \Delta \text{ – искомая прямая линия.}$$

Алгоритм 2 (рис. 9.8в):

$$1) \Sigma(a, M);$$

$$2) K = b \cap \Sigma;$$

$$3) MK \text{ – искомая прямая линия.}$$

Решение на проекционном чертеже

Чертеж выполним на компьютере или карандашом на бумаге.

- ♦ По координатам, приведенным для 3D-модели (см. выше), постройте проекции отрезков a, b и точки M (рис. 10.6а).

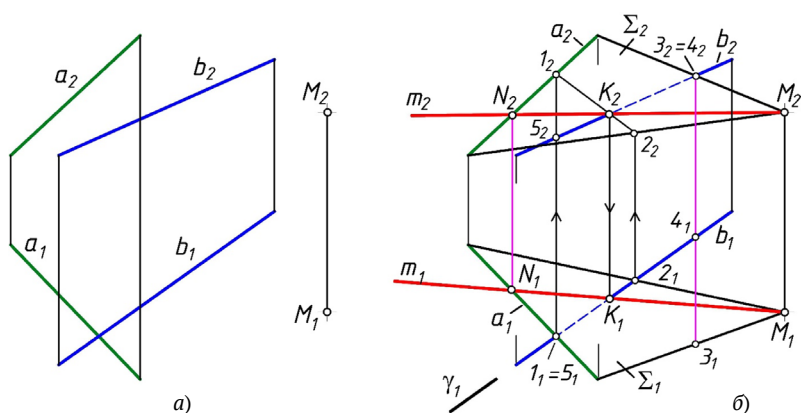


Рис. 10.6. Решение комплексной задачи 8 на проекционном чертеже:
а – дано; б – чертеж

Для решения задачи необходимо построить точку K как вторую точку искомой прямой m . Для этого можно, как в предыдущей задаче 7, применить алгоритм

2-й позиционной задачи. Но сейчас применим более простой алгоритм первой позиционной задачи (см. разделы 5.5 и 6.4), т. е. найдем точку K как результат пересечения прямой b с плоскостью треугольника Σ (a, M) (рис. 10.6б):

- ◆ соедините конечные точки проекций отрезка a с проекциями точки M – построены проекции треугольника Σ ;
- ◆ введем вспомогательную секущую плоскость $\gamma \supset b$, задав ее горизонтально проецирующей, т. е. проекцией $\gamma_1 \supset b_1$;
- ◆ строим проекции отрезка $(1,2) = \gamma \cap \Sigma$;
- ◆ на пересечении фронтальных проекции находим проекцию искомой точки $K_2 = 1_2 2_2 \cap b_2$;
- ◆ по проекционной связи находим горизонтальную проекцию точки K_1 ;
- ◆ по проекциям точек M, K строим проекции искомой прямой m ;
- ◆ продляем прямую m и находим проекции точки N ;
- ◆ для проверки правильности решения следует убедиться, что проекции N_1 и N_2 находятся на вертикальной линии связи;
- ◆ считаем, что треугольник Σ непрозрачен, и методом конкурирующих точек (см. раздел 6.4.1) определяем видимость отрезка b . Видимость на Π_2 определяем по точкам 3 и 4. Видимость на Π_1 – по точкам 1 и 5;
- ◆ сохраните построения 3D-модели и чертежа в файле «Комплексная 8.dwg».

10.9. Материалы к разделу 9.6.3

Задача 9. Построить отрезок m , проходящий через заданную точку K и перпендикулярный двум заданным скрещивающимся прямым a, b (рис. 9.9а).

Построение 3D-модели

Координаты конечных точек отрезков и точки в МСК (см. рис. 9.9а): отрезок $a((53.9, 7.7, 63.2)(78.9, 61.7, 21.2))$; отрезок $b((85.9, 7.7, 42.2)(53.9, 54.7, 63.2))$; точка $K(15.1, 23.4, 15)$.

Реализация алгоритма 1 (см. рис. 9.9б)

- ◆ Создайте файл на основе шаблона; МСК, визуальный стиль «Концептуальный»;
- ◆ по приведенным координатам конечных точек постройте отрезки a, b , поставьте маркер точки K по ее координатам;
- ◆ для построения плоскости Σ установите ПСК опцией «Направление оси Z »  вдоль отрезка a ;
- ◆ перенесите  начало координат ПСК в точку K ;
- ◆ постройте замкнутую 3D-полилинию  по точкам $(0,0,0)$ $(29.3,19.7,0)$ $(8.4,34.3,0)$ – построен треугольник Σ ;
- ◆ Выдавливание  \ Выберите объекты для выдавливания: укажите 3D-полилинию \ укажите высоту выдавливания: 0.001 – по контуру полилинии построен солид плоскости Σ ;

- ♦ повторите построения для отрезка b – построен солид плоскости Δ ;
- ♦ Объединение  \ укажите солиды плоскостей Σ и Δ – получена линия пересечения треугольников, являющаяся решением задачи;
- ♦ по точкам линии пересечения с объектной привязкой «Конточка» постройте отрезок m и ручками удлините его (см. рис. 9.9б) – построен отрезок m , являющийся решением задачи.

Реализация алгоритма 2 (см. рис. 9.9в)

- ♦ Для построения плоскости параллелизма скопируйте отрезок b за точку 1 в точку 2 – создана плоскость параллелизма $\gamma(a \cap b')$.
- ♦ Установите ПСК по трем точкам  в плоскость параллелизма.
- ♦ Из точки K опустите перпендикуляр на плоскость ПСК. Для этого включите режим ортогональных построений и проведите отрезок m , параллельный оси Z , – полученный отрезок m является искомым.
- ♦ Придайте моделям наглядность присвоением цвета, настройкой освещения. Постройте проекции прямых и солид-объектов на плоскость P_1 .

Алгоритм решения в символьной форме

Дано: $a \div b; K$.

Построить: $m \perp a, m \perp b, m \supset K$.

Анализ:

$\{m: (m \supset K, m \perp a)\} \Rightarrow \Sigma$;

$\{m: (m \supset K, m \perp b)\} \Rightarrow \Delta$;

Исследование: $m = \gamma \cap \Delta$ – единственное решение.

Алгоритм 1:

- 1) $\Sigma \supset K, \Sigma \perp a$;
- 2) $\Delta \supset K, \Delta \perp b$;
- 3) $m (\Sigma \cap \Delta)$ – искомая прямая.

Алгоритм 2:

- 1) $b' \parallel b; b' \cap a$;
- 2) $\gamma (a' \cap b')$ – плоскость параллелизма;
- 3) $m \supset K; m \perp \gamma$ – искомая прямая.

Решение на проекционном чертеже

Чертеж (рис. 10.7) выполним по 2D на компьютере или карандашом на бумаге. Решение приведем согласно алгоритму 1 (см. раздел 9.6.3, рис. 9.9б).

- ♦ По координатам, приведенным для 3D-модели (см выше), постройте проекции отрезков a, b и точки K (рис. 10.7а). Если была построена 3D-модель, то проекции можно построить автоматически как 2D-виды (см. раздел 8.2).
- ♦ Зададим плоскость $\Sigma \perp a$. О построении плоскости, перпендикулярной прямой, см. раздел 6.8.5. Плоскость зададим горизонталью h и фронталью f , при этом $h_1 \perp a_1$ и $f_2 \perp a_2$.

- ◆ Зададим плоскость $\Delta \perp b$, задав ее горизонталью h' и фронталью f' , при этом $h'_1 \perp b_1$ и $f'_2 \perp b_2$.

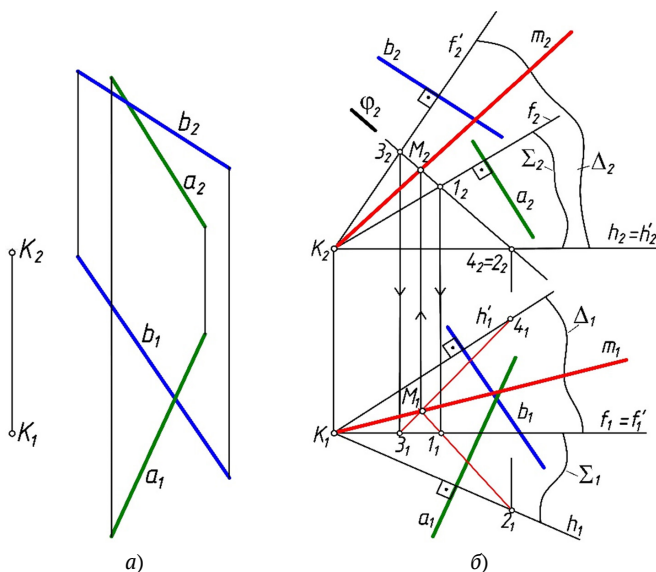


Рис. 10.7. Решение комплексной задачи 9 на проекционном чертеже:
а – дано; б – чертеж

Плоскости Σ и Δ имеют общую точку K . Поэтому для построения линии пересечения этих плоскостей достаточно найти еще одну точку M . Применяем алгоритм второй позиционной задачи (см. раздел 6.6.3, рис. 6.3б):

- ◆ задаем вспомогательную фронтально проецирующую секущую плоскость φ (ее проекция φ_2);
- ◆ находим отрезки (1, 2) и (3, 4). На пересечении горизонтальных проекций этих отрезков находим проекцию искомой точки M_1 , по проекционной связи в плоскости φ находим фронтальную проекцию точки M_2 ;
- ◆ строим проекции отрезка KM и удлиняем их. Построена прямая m , являющаяся решением задачи;
- ◆ сохраните файл 3D-модели и чертежа с именем «Комплексная 9.dwg».

10.10. Материалы к разделу 9.6.4

Задача 10. Построить прямую d , проходящую через точку A на расстоянии 25 мм от точки B и пересекающую прямую m .

Построение 3D-модели

Координаты конечных точек отрезков и точек в МСК (см. рис. 9.10а): отрезок $m((75.4, 46.9, 50.9)(57.1, -0.6, 34.7))$; точка $A(75.1, 15.2, 36.1)$; точка $B(42.5, 47.8, 43.3)$.

- ◆ Создайте файл на основе шаблона; МСК, визуальный стиль «Концептуальный»;
- ◆ по приведенным координатам конечных точек постройте отрезок m , поставьте маркеры точек A, B (см. рис. 9.10а);
- ◆ постройте сферу с центром в точке B радиусом 25 (см. рис. 9.10б);
- ◆ установите ПСК по трем точкам  – двум концам отрезка m и точке A ;
- ◆ командой «Сечение»  постройте сечение сферы плоскостью XY ПСК – получена окружность сечения c ;
- ◆ из точки A постройте два отрезка d, d' , касательных к окружности сечения. Точки касания 1, 2 (рис. 9.10б) укажите с объектной привязкой «Касательная». Построенные отрезки являются решением задачи.

Тонкостенная оболочка конуса

Рассмотрим, как создать тонкостенную оболочку на основе поверхности солид-объекта. Примером является пустотелый конус α в 3D-модели рассматриваемой задачи (см. рис. 9.10б).

Алгоритм построения оболочки следующий. Построить солид, командой «Разбивка» преобразовать его в объекты «Поверхность», к поверхностям применить команду «Толщина».

В задаче 10 создадим солид-конус, касающийся сферы β . Из него разбивкой получим поверхность, затем оболочку толщиной 0.1 мм:

- ◆ постройте отрезок AB , являющийся осью конуса;
- ◆ установите ПСК осью Z по оси конуса , задав начало в точке B , конец оси – в точке A ;
- ◆ опустите перпендикуляр (привязка «Нормаль») из точки касания 2 (см. рис. 9.10в) на отрезок оси конуса;
- ◆ перенесите начало координат  в основание перпендикуляра;
- ◆ Конус  \ Центр: 0,0 \ Радиус основания: укажите точку 2 \ Высота: укажите точку A .

Сместите основание конуса, сохранив коническую поверхность касательной к сфере:

- ◆ Редактировать тело  \ Грань \ Сместить \ укажите основание конуса \ Укажите расстояние смещения: 10 – построен солид-конус;
- ◆ Разбивка  \ укажите конус – из солид-объекта с конической поверхности образована поверхность, с основания конуса – область;
- ◆ 3D-инструменты \ Прямое моделирование \ Толщина  \ укажите поверхность конуса \ Укажите толщину: 0.1 – построена оболочка конической поверхности указанной толщины;
- ◆ удалите  основание, закрывающее оболочку.

Решение на проекционном чертеже

- ◆ По координатам, приведенным для 3D-модели (см. выше), постройте проекцию отрезка m и проекции точек A, B (рис. 10.8а). Если была построена 3D-модель, то проекции можно построить автоматически как 2D-виды (см. раздел 8.2).

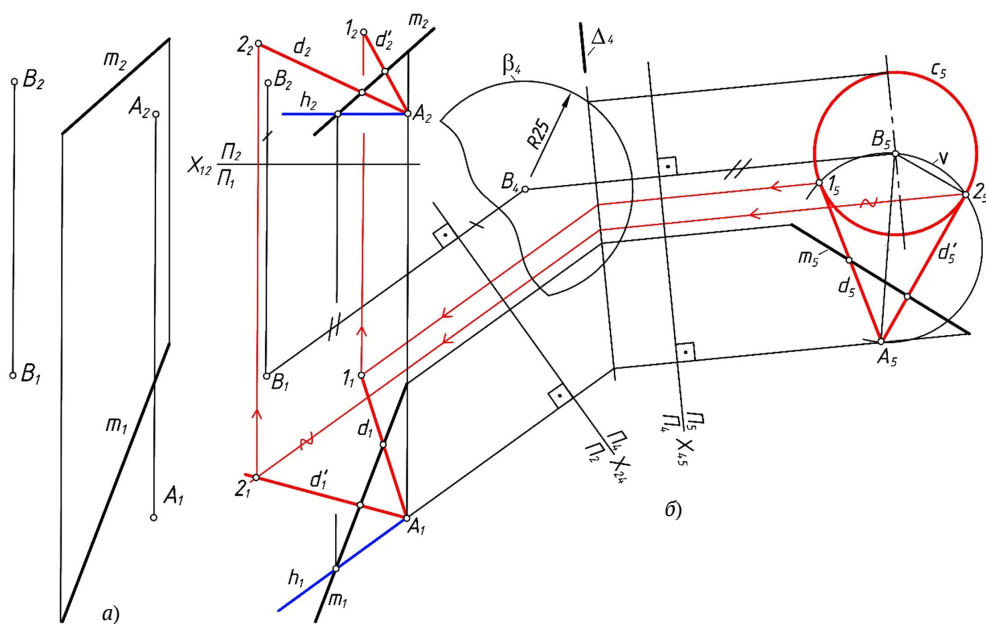


Рис. 10.8. Решение комплексной задачи 10 на проекционном чертеже:
а – дано; б – чертеж

Решение заключается в определении отрезков d, d' , являющихся касательными, проведенными из точки A к сфере β . Для решения необходимо построить окружность сечения сферы β плоскостью $\Delta(A, m)$ и отобразить эту окружность в истинном виде.

Выполнено (рис. 10.8б) преобразование плоскости Δ , являющейся плоскостью общего положения, в плоскость уровня. Для этого в плоскости Δ построена горизонталь h , введена дополнительная плоскость $\Pi_4 \perp h$, относительно которой плоскость Δ стала проецирующей Δ_4 . Затем введена плоскость $\Pi_5 \parallel \Delta$. Для построения касательных прямых d, d' на отрезке A_5B_5 как на диаметре построена окружность ν . Пересечение окружностей ν и σ определяет точки касания $1_5, 2_5$. Обратными построениями найдены фронтальные и горизонтальные проекции искомых отрезков d, d' .

- ◆ Сохраните файл 3D-модели и чертежа с именем «Комплексная 10.dwg».

10.11. Материалы к разделу 9.6.5

Задача 11. Построить прямую, проходящую через точку A , составляющую с прямой AB угол 30° и расположенную на расстоянии 20 мм от прямой CD (см. рис. 9.11а).

Построение 3D-модели

Координаты конечных точек отрезков: $A(9.9, 59.2, 34)$; $B(45.9, 17.2, 74)$; $C(62.9, 67.2, 89)$; $D(93.9, 44.2, 29)$.

- ◆ Создайте новый файл на основе шаблона; МСК, визуальный стиль «Концептуальный».
- ◆ По приведенным координатам постройте отрезки AB и CD .

Строим конус с осью AB , вершиной в точке A и углом при вершине 30° (см. рис. 9.11б):

- 1) установите ПСК по трем точкам  так, чтобы ось X стала направленной вдоль отрезка AB . Третья точка может быть задана произвольно. Например, последовательно укажите точки A, B, D . Отрезок AB рассматриваем как ось конуса;
- 2) постройте образующую конуса – отрезок AB' (см. рис. 9.11а). Для этого поверните отрезок AB вокруг точки A на -30° . Примените команду «Поворот» , базовая точка A (с объектной привязкой «Конечная») с опцией «Копировать»;
- 3) из точки B' опустите перпендикуляр на ось конуса. Основание перпендикуляра, точку S , принимаем за центр основания конуса, точку A – за его вершину;
- 4) установите ПСК с опцией «Z-ось» , начало в точке S , конец в точке A ;
- 5) Конус  \ Центр основания: укажите точку S или 0,0 \ Радиус: укажите точку B' \ Высота: укажите точку A – построен конус.

Строим цилиндр радиусом 20 с осью CD . Его получим выдавливанием основания – окружности:

- 6) установите ПСК с опцией «Z-ось» , начало в точке D , конец в точке C ;
- 7) Окружность  \ Центр: 0,0 \ Радиус 20;
- 8) Выдавливание  \ Выберите объект: укажите окружность \ Укажите высоту выдавливания: укажите точку C – построен цилиндр. Сохранена окружность основания.

Цилиндр нужен лишь для придания модели наглядности. Поэтому можно его временно скрыть: изолировать или заморозить слой, на котором он создан.

Строим плоскость Δ , касательную к цилиндру:

- 9) из точки A постройте отрезок m , касательный к окружности основания цилиндра. Точку касания укажите на окружности основания с объектной при-

вязкой «Касательная». Для задач с двумя касательными плоскостями (см. рис. 9.11в) касательные строим с двух сторон окружности;

- 10) скопируйте отрезок оси цилиндра CD в точку касания K – построен отрезок n , по которому происходит касание плоскости Δ с поверхностью цилиндра. Отрезки m и n задают касательную плоскость Δ .
- 11) вращая изображение , определите количество решений. Можно увидеть, что вторая касательная плоскость, охватывающая цилиндр с противоположной стороны, конус пересекать не будет. Следовательно, задача будет иметь только два решения.

Построим сечение конуса плоскостью Δ . Сечением является область в виде треугольника:

- 12) Сечение  \ Выберите объекты: Первая точка на секущей плоскости: укажите вершину конуса точку A \ укажите две конечные точки отрезка n – построено треугольное сечение конуса;
- 13) временно скройте конус (изолируйте его или заморозьте слой);
- 14) командой «Разбивка»  выделите боковые стороны треугольника, полученного в сечении. Эти отрезки a, b являются решением задачи;
- 15) для повышения наглядности модели рекомендуем цилиндр и конус преобразовать в тонкостенные оболочки. Алгоритм преобразования приведен в разделе 10.10 при построении оболочки из солид-конуса.

Проверка правильности решения

1. Определите, происходит ли пересечение отрезков a, b с отрезком касательной n . Для этого предварительно удлините найденные отрезки и с объектной привязкой «Пересечение» поставьте маркеры точек M, N (см. рис. 9.11б). Эти точки являются точками касания найденных прямых с цилиндром. Простановка маркеров подтверждает пересечение и касание. Если маркеры, один или оба, не образуются, то допущена ошибка решения.
2. Определите расстояние от найденных прямых до оси цилиндра. Для этого из точек M, N опустите перпендикуляры (объектная привязка «Нормаль») на отрезок CD и командой «Список» или в панели «Свойства» определите длины отрезков-перпендикуляров. Длина каждого должна быть равной 20.
3. Измерьте углы между каждым из отрезков a, b и осью конуса – отрезком AB . Для этого установите ПСК в плоскость измеряемого угла и проставьте угловой размер между отрезками. Величины каждого из углов должны быть 30° .

Решение на проекционном чертеже

Для решения необходимы следующие преобразования чертежа (рис. 10.9):

- 1) для построения касательной плоскости – преобразовать ось цилиндра CD в проецирующую прямую;
- 2) для построения конуса – преобразовать ось конуса AB в прямую уровня;
- 3) для построения сечения конуса плоскостью и нахождения искомых отрезков a, b – преобразовать ось конуса AB в проецирующую прямую.

- ◆ По координатам, приведенным для 3D-модели (см выше), постройте проекции отрезков AB и CD (рис. 10.9а).

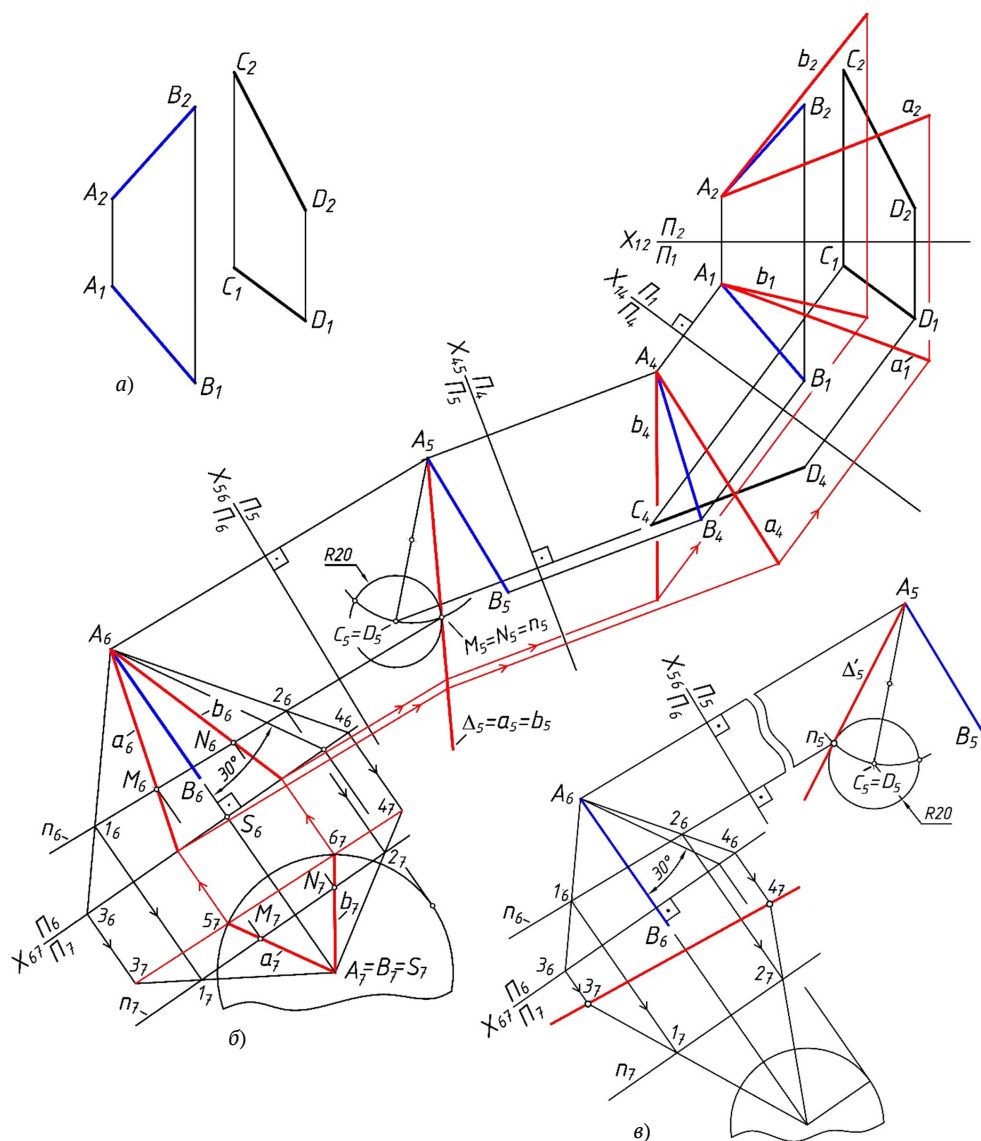


Рис. 10.9. Решение комплексной задачи 11 на проекционном чертеже:
а – дано; б – чертеж; в – фрагмент для второй касательной плоскости

Дальнейшие построения следующие (рис. 10.9б). Для выполнения преобразования 1 последовательно строим проекции отрезков на дополнительные плоскости $\Pi_4 \parallel CD$ и на $\Pi_5 \perp CD$. В плоскости Π_5 , где цилиндр отображен как окружность $R20$, определяем положение касательной плоскости Δ к цилиндру и прямую n , по которой происходит касание.

Для преобразования 2 введена плоскость $\Pi_6 \parallel AB$. В Π_6 строим образующую конуса под углом 30° к его оси и задаем центр S основания конуса.

Для преобразования 3 через точку S вводим плоскость $\Pi_7 \perp AB$ и строим в ней окружность основания конуса. В проекциях на плоскости Π_6 и Π_7 решаем задачу о построении точек пересечения прямой n с поверхностью конуса. Строим сечение конуса касательной плоскостью $\Delta (A, n)$. Для этого на прямой n зададим точки 1, 2. Находим отрезок (3, 4) пересечения Δ с плоскостью основания конуса и точки 5, 6 пересечения Δ с окружностью основания конуса. По этим точкам из вершины конуса проводим проекции образующих конуса a_7, b_7 . Эти образующие конуса являются решением задачи. Дополнительно определяем точки M_7, N_7 , которые являются проекциями точек касания прямых a, b с поверхностью цилиндра.

Обратными построениями находим горизонтальные и фронтальные проекции искомых прямых a, b . Такими же построениями могут быть найдены проекции точек касания.

Показана (рис. 10.9в) проверка решения для второй касательной плоскости Δ' . Повторены построения для определения точек пересечения прямой n , по которой плоскость Δ' касается цилиндра, с поверхностью конуса. Отрезок (3₇, 4₇) не пересекает окружность основания конуса. Следовательно, плоскость Δ' не пересекает цилиндр, и дополнительных решений задачи не образуется. То есть при заданных параметрах задача имеет только два решения – это отрезки a, b , образованные касательной плоскостью Δ .

◆ Сохраните файл 3D-модели и чертежа с именем «Комплексная 11 .dwg».

10.12. Материалы к разделу 9.7.1

Задача 12. Построить плоскость, удаленную от точек A, B, C на расстояние 20, 10, 5 мм соответственно.

Построение 3D-модели

Координаты точек: $A: (32, 22, 30)$; $B: (54, 50, 52)$; $C: (77, 36, 30)$. Радиусы сфер соответственно 20, 10, 5 мм.

- ◆ Создайте файл на основе шаблона; МСК, визуальный стиль «Концептуальный».
- ◆ По приведенным координатам поставьте маркеры точек A, B, C (см. рис. 9.12а).

Выполняем разметку (см. рис. 9.12в):

- ◆ установите ПСК  по трем точкам: A (начало), C (ось X), B (третья точка);
- ◆ План \ Текущая – установлен вид на плоскость XY ;
- ◆ в плоскости ПСК постройте окружности с центрами в заданных точках и радиусами, равными заданным расстояниям от точек до искомой плоскости. Эти окружности считаем диаметрными сечениями трех сфер;
- ◆ постройте отрезок AB , указывая точки с привязкой «Узел» и «Центр»;

- ◆ постройте отрезок (1, 2) общей касательной к окружностям R20, R10. Для этого примените команду «Отрезок» с объектной привязкой «Касательная» к каждой конечной точке отрезка;
- ◆ удлините отрезки (1, 2) и AB (ручками или командой «Увеличение»  \ Динамика») до взаимного пересечения и найдите точку 3;
- ◆ из точки 1 опустите перпендикуляр на отрезок AB и найдите точку 3.

Строим конусы λ и φ (см. рис. 9.12б):

- ◆ Вид \ ПСК, направление оси Z  \ укажите новую начальную точку: укажите точку 3 \ Точка на положительном луче оси Z: укажите точку S;
- ◆ 3D-инструменты \ Прямое моделирование \ Конус  \ Центр основания: 0,0 \ Радиус: с привязкой «Контоточка» укажите точку 1 \ Высота: укажите точку S – построен конус λ ;
- ◆ временно скройте (изолируйте) конус λ ;
- ◆ повторите построения для получения конуса φ ;
- ◆ восстановите изображение конуса λ ;
- ◆ 3D-инструменты \ Булевы операции \ Объединение  \ укажите оба конуса – получена линия пересечения конусов.

На линии пересечения конусов выявлены точки K, K' касания конусов с общей сферой α , имеющей диаметрально окружность R20. Точки S, S', K определяют первую искомую плоскость Δ . Точки S, S', K' определяют вторую искомую плоскость Δ' .

Для придания модели наглядности (см. рис. 9.12б, г) постройте три сферы, отрезки линий касания SK и SK' , модели найденных плоскостей. Поверхностям солид-объектов придайте цвет, прозрачность, настройте освещение.

Решение на проекционном чертеже

Для решения задачи 12 на чертеже (рис. 10.10) необходимо, согласно алгоритму Г. Монжа [6], построить прямую, соединяющую вершины двух касательных конусов. Затем построить плоскость, проходящую через эту прямую и касательную к одной из сфер, и получить изображение, как на рис. 9.12д, в котором искомые касательные плоскости отображены как проецирующие.

Это требует выполнения следующих преобразований чертежа:

- 1) преобразовать плоскость, заданную точками A, B, C , в плоскость уровня. Это позволит на чертеже повторить построения как при разметке 3D-модели (см. рис. 9.12в), определить вершины конусов, касательных к сферам, и построить прямую, проходящую через их вершины;
- 2) преобразовать прямую, соединяющую вершины конусов, в проецирующую. При этом касательные плоскости также становятся проецирующими, что позволит определить точки их касания со сферами.

На чертеже (рис. 10.10) приведено построение одной из восьми возможных касательных плоскостей.

- ◆ По координатам, приведенным для 3D-модели (см выше), постройте проекции точек A, B, C (рис. 10.10а).

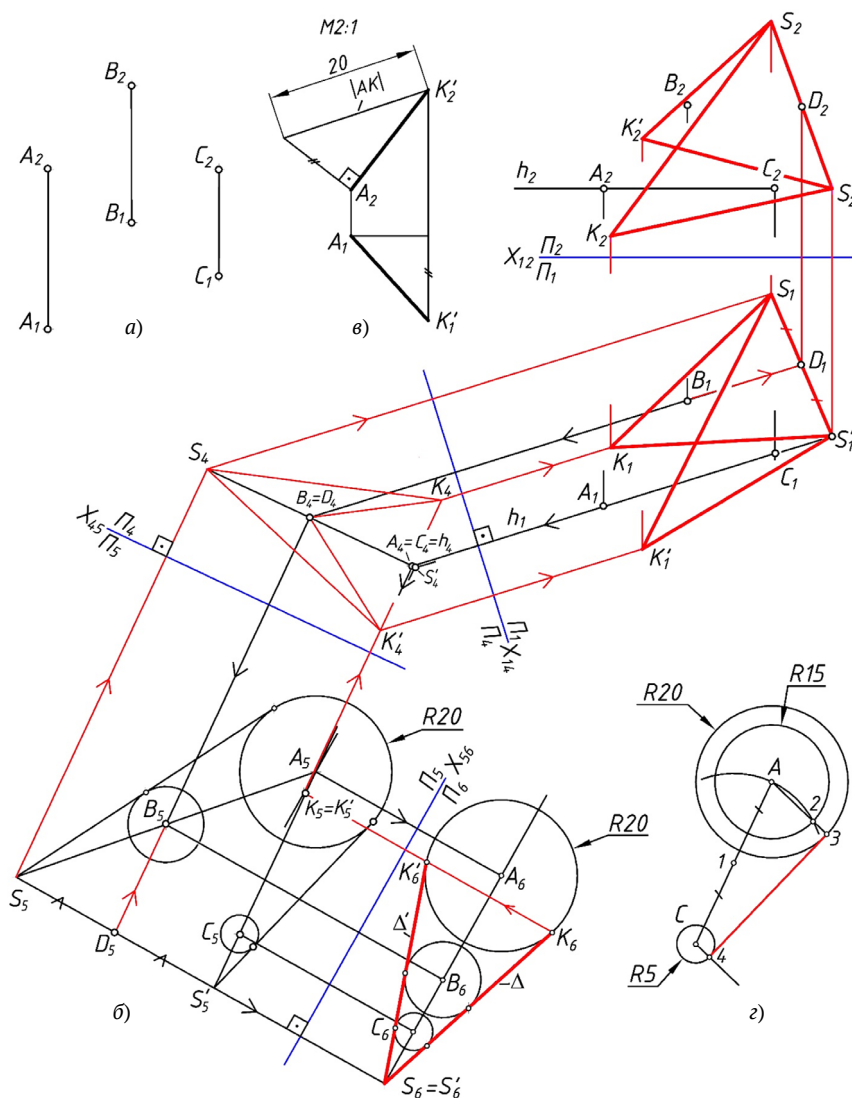


Рис. 10.10. Решение комплексной задачи 12 на проекционном чертеже: а – дано; б – чертеж; в – проверка решения; г – построение касательной

Для первого преобразования учитываем, что Z -координаты точек A, C равны между собой, поэтому отрезок AC является горизонталью h . Вводим плоскость $\Pi_4 \perp h$. Плоскость (ABC) стала проецирующей в виде отрезка B_4A_4 .

Вводим плоскость $\Pi_5 \parallel B_4A_4$. В Π_5 выполняем построения диаметральных окружностей трех сфер R_{20}, R_{10}, R_5 . Строим касательные (их построение рассмотрено ниже) к парам окружностей R_{20}, R_{10} и R_{20}, R_5 и отрезки A_5B_5, A_5C_5 осей конусов.

Находим точки S_5, S'_5 пересечения касательных с отрезками осей и проводим прямую $S_5S'_5$. Это проекция прямой, определяющей искомую касательную плоскость. Осталось найти точку ее касания с одной из сфер.

Вводим плоскость $\Pi_6 \perp S_5S'_5$. Из точки $S_6 = S'_6$ строим касательные к окружности R_{20} и находим точки K_6, K'_6 . Это проекции точек касания искомой плоскости со сферой R_{20} . То есть найдены прямая SS' и точки K, K' , задающие касательные плоскости Δ и Δ' , являющиеся решением задачи.

Обратными построениями находим горизонтальные и фронтальные проекции точек S, S', K, K' .

Для построения касательной к двум окружностям применяем известный в геометрии алгоритм, показанный на примере окружностей R_{20}, R_5 (см. рис. 10.10г). Строим вспомогательную окружность R_{15} , радиус которой определяем как $R_{15} = R_{20} - R_5$. Построением дуги из точки 1, являющейся средней точкой отрезка AC , находим точку 2. На пересечении отрезка $(A, 2)$ с окружностью R_{20} находим точку 3. Из точки C проводим отрезок, параллельный $(A, 3)$, и на пересечении с окружностью R_5 находим точку 4. Проводим отрезок $(3, 4)$, являющийся отрезком искомой общей касательной к окружностям R_{20}, R_5 .

Для проверки решения следует определить истинную величину отрезков, соединяющих заданные точки с точками касания сфер. На рис. 10.10в показана проверка на примере отрезка AK' , длина которого равна расстоянию от точки A до найденной плоскости Δ' . Проверка выполнена способом прямоугольника (см. раздел 7.2.3). Результат соответствует заданному значению, т. е. подтверждает правильность решения.

Третий конус. Теоремы Монжа. Выход в пространство

Исследуя решение задачи о построении плоскости, касательной к трем сферам, Гаспар Монж доказал три теоремы [6]. Наиболее известная из них – теорема о трех окружностях и общих касательных, которая позднее получила название теоремы о «о трех кругах», «трех конусах» или «трех колпаках». Рассмотрим, как в теореме связаны «круги и колпаки».

Вот формулировка теоремы, данная Г. Монжем: «Если дано положение и размеры трех каких угодно кругов на плоскости и если, рассматривая их попарно, провести к ним внешние касательные, продолженные до их взаимного пересечения, то три точки пересечения D, E, F , полученные таким образом, будут лежать на одной прямой».

В справедливости теоремы можно убедиться построением.

- ◆ Постройте в любой плоскости три окружности. Пусть это будут окружности задачи 12 (рис. 10.11а). Дополним касательные к окружностям так, чтобы к каждой паре окружностей были по две внешние касательные, и удлиним эти касательные до взаимного пересечения. Точки пересечения касательных обозначим D, E, F («как у Монжа»).
- ◆ Через две точки, например D и E , проведем прямую и убедимся, что она точно проходит через третью точку F . То есть три точки принадлежат одной прямой.

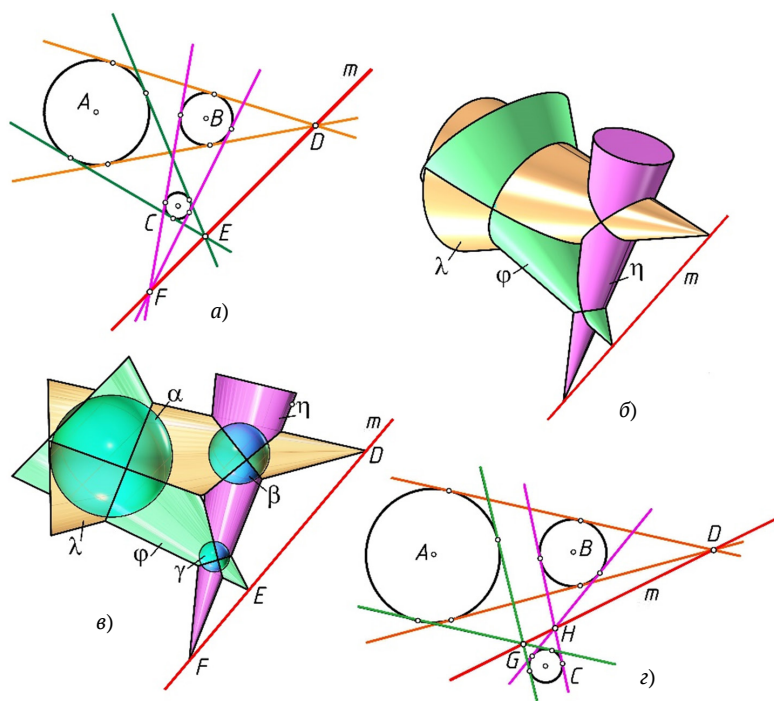


Рис. 10.11. К теореме Монжа. Выход в пространство:
 а – внешние касательные; б, в – 3D-модели; г – смешанные касательные

Но полученный результат еще не доказательство. Доказательство, предложенное Г. Монжем, состоит в следующем.

Добавим к двум построенным конусам λ , φ , которые являются касательными к сферам α , β и α , γ , третий конус η , построенный касательным к сферам β и γ (рис. 10.11б, в). Его построение выполняется так же, как двух предыдущих касательных конуса.

Все три конуса имеют общую касательную плоскость Δ (см. рис. 9.12г). В ней находятся вершины этих конусов. Но вершины находятся и в плоскости разметки, определенной центрами окружностей A, B, C , т. е. находятся в двух плоскостях и, следовательно, принадлежат линии их пересечения m . Поскольку плоскости пересекаются по прямой, то точки D, E, F принадлежат одной прямой. Теорема доказана.

Метод, примененный в доказательстве теоремы, называется «выходом в пространство». Он заключается в том, что задачи на плоскости решаются построением 3D-объектов. Этот метод неоднократно применялся в геометрии. Он близок к теме нашего курса и очередной раз показывает роль 3D-построений в геометрии.

Еще одна особенность пересечения касательных, построенных к трем окружностям, указанная Г. Монжем как еще одна теорема, также объясняемая выходом в пространство: если для трех произвольных окружностей, расположенных в плоскости, построить две пары внутренних касательных и одну пару с внешним

касанием, то точки пересечения пар касательных принадлежат одной прямой. Выбор пар произвольный. Например (рис. 10.11з), для пар окружностей с центрами A, B и A, C построены внутренние касательные с точками пересечения G, H . Для третьей пары B, C построены внешние касательные с пересечением в точке D . Построение подтверждает, что точки G, H, D принадлежат одной прямой.

- ◆ Сохраните файл 3D-моделей и чертежа с именем «Комплексная 12.dwg».

10.13. Материалы к разделу 9.7.2

Задача 13. Построить плоскость, перпендикулярную заданной плоскости $\Delta(m \parallel n)$, равнонаклоненную к координатным плоскостями Π_1 и Π_2 и проходящую через точку D .

Построение 3D-модели

Координаты конечных точек отрезков: $m((20.6, 57.8, 31.6)(8, 27.9, 56.7))$; $n((46.8, 35.8, 18.6)(34.2, 6, 43.7))$; точка $D(60.6, 43.2, 36.5)$.

- ◆ Создайте новый файл на основе шаблона; МСК, визуальный стиль «Концептуальный».
- ◆ По приведенным координатам постройте отрезки m, n и маркер точки D (см. рис. 9.14а).
- ◆ Установите ПСК в плоскость Π_3 и постройте два пересекающихся отрезка d и d' под углом 45° . Если построения выполняете в шаблоне, где область Π_3 задана квадратной, можно построить отрезки как диагонали квадрата.
- ◆ Переместите отрезки d, d' за точку их пересечения в точку D и удалите нижнюю часть этих отрезков (см. рис. 9.14б).
- ◆ Установите ПСК в плоскость Δ по трем точкам $\overset{\uparrow}{L}_3$, указав конечные точки отрезков m, n .
- ◆ Включите режим «ОРТО». Из точки D , перемещая курсор вдоль оси Z , постройте отрезок q перпендикуляра к плоскости Δ , длину отрезка введите с клавиатуры равной 50.

Искомые плоскости построены. Для наглядности модели создайте из отрезков треугольные области Σ и Σ' (рис. 9.14в). Создайте прямоугольную область Δ из отрезков m, n . Придайте областям цвет. Настройте источники света.

Проверку решения (см. рис. 9.14в) покажем на примере плоскости Σ . Проверим, является ли плоскость Σ равнонаклоненной:

- ◆ установите ПСК по трем точкам $\overset{\uparrow}{L}_3$, указав три точки плоскости Σ ;
- ◆ включите режим «ОРТО». Из точки 1, перемещая курсор вдоль оси Z , постройте отрезок g перпендикуляра к плоскости Σ , введите значение длины отрезка 50 мм;
- ◆ восстановите МСК .
- ◆ из точки 1 в режиме «ОРТО» постройте отрезки v и k длиной по 50 мм каждый;

- ♦ установите ПСК по трем точкам $\downarrow^3$, указав точку 1 и две конечные точки отрезков g, v ;
- ♦ поставьте угловой размер $\angle$ между отрезками g, v ;
- ♦ установите ПСК по точке 1 и двум конечным точкам отрезков g, k . Поставьте угловой размер между отрезками g, k .

При правильном решении значения углов $\angle(g, v) \angle(g, k)$ должны быть равны.

Решение на проекционном чертеже

- ♦ По координатам, приведенным для 3D-модели (см. выше), постройте проекции отрезков m, n и точки D (рис. 10.12а).

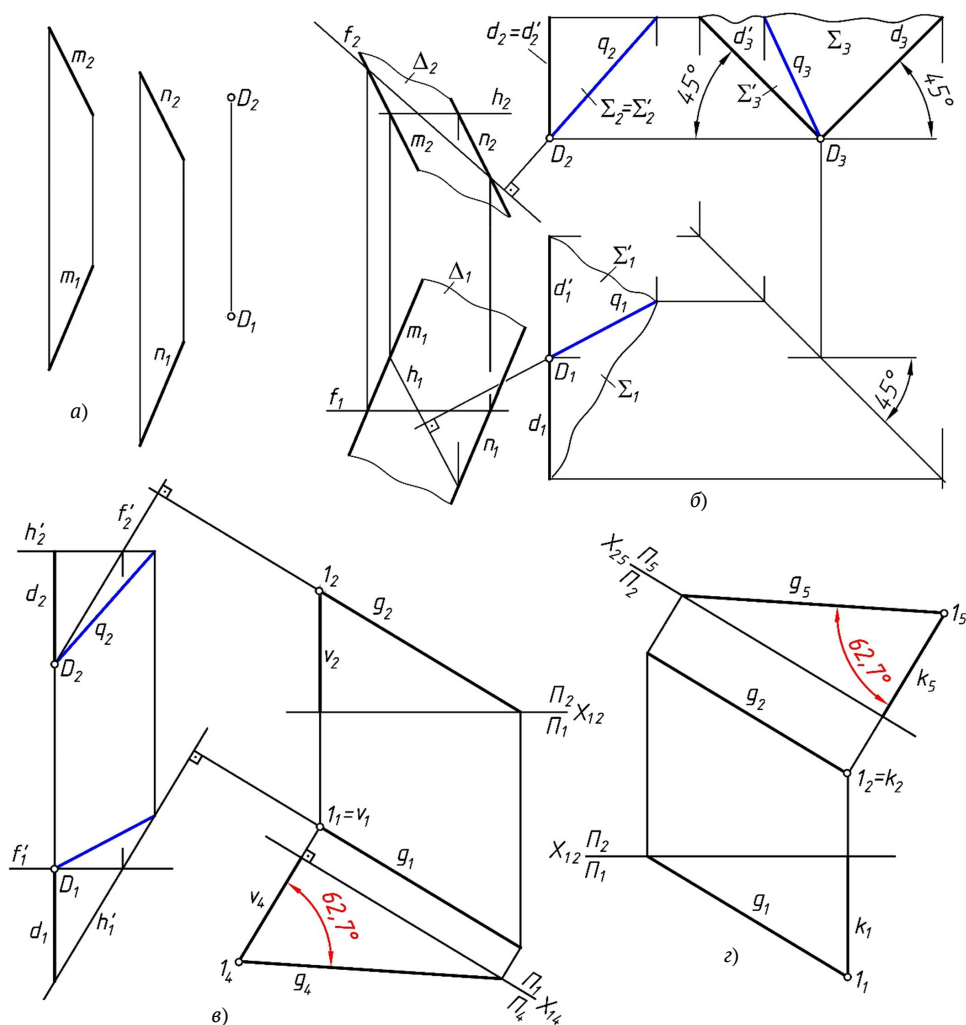


Рис. 10.12. Решение комплексной задачи 13 на проекционном чертеже:
а – дано; б – решение; в, г – проверка решения

Из точки D строим перпендикуляр q к плоскости $\Delta (m, n)$. Для этого в плоскости Δ строим горизонталь h и фронталь f (рис. 10.12б). Согласно алгоритму построения перпендикуляра к плоскости (см. раздел 6.8.5) зададим $q_1 \perp f_1, q_2 \perp f_2$. Из точки D_3 строим профильные проекции отрезков d_3, d'_3 под углом 45° к горизонтальной оси. Длина отрезков ≈ 50 мм. По проекционной связи находим горизонтальные и фронтальные проекции этих отрезков.

Отрезки q, d, d' определяют две искомые плоскости $\Sigma (q, d)$ и $\Sigma' (q, d')$, являющиеся решением задачи.

Для проверки решения определяем углы между каждой из найденных плоскостей Σ и Σ' с плоскостями Π_1, Π_2 . Необходимо убедиться, что эти углы для каждой плоскости попарно равны. На рис. 10.12в, г показана проверка для плоскости Σ . Для определения угла с плоскостью Π_1 на свободном поле чертежа из произвольной точки 1 (рис. 8.16в) построен перпендикуляр g к плоскости Σ . Длина отрезка $g \approx 50$ мм. Из той же точки 1 построен отрезок горизонтальной проецирующей прямой v . Проецированием на дополнительную плоскость Π_4 определена искомая истинная величина угла между перпендикулярами как угол между плоскостями Σ и Π_1 .

Для определения угла между плоскостями Σ и Π_2 на свободном поле чертежа (рис. 8.16з) в произвольной точке 1 скопирован отрезок g . Из той же точки построен отрезок k фронтально проецирующей прямой. Проецированием на дополнительную плоскость Π_5 определена истинная величина угла между перпендикулярами g, k плоскостями Σ и Π_2 .

Измерения найденных углов показали их равенство, т. е. плоскость Σ является равнонаклоненной к Π_1 и Π_2 .

♦ Сохраните файл 3D-модели и чертежа с именем «Комплексная 13.dwg».

10.14. Материалы к разделу 9.7.3

Задача 14. Построить плоскость, составляющую с плоскостью Π_1 угол 70° , с плоскостью Π_2 – угол 45° и проходящую через точку D .

Построение 3D-модели

Координаты точки D в МСК: (50, 35, 50).

♦ Создайте файл на основе шаблона. В окне аксонометрии, в МСК, поставьте маркер точки D (рис. 9.15а).

Во фронтальной плоскости строим контуры конусов. Высоту конусов зададим 50 (рис. 10.13):

♦ перейдите в видовой экран вида спереди или в окне аксонометрии поверните ПСК вокруг оси X на 90° . Перейдите на новый слой;

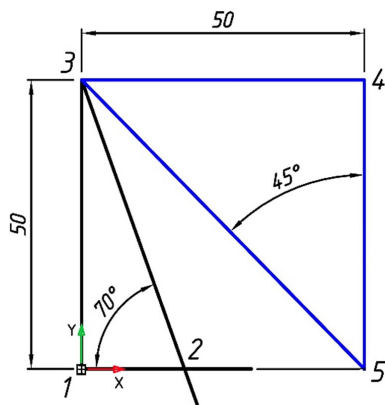


Рис. 10.13. Контуры конусов к комплексной задаче 14

- ◆ Отрезок  \ Первая точка: 0,0 \ Укажите следующую точку: 0,50 – это точка 3 \ @60<-70;
- ◆ Отрезок \ 0,0 \ 30,0 – построен контур (1, 2, 3) конуса α с углом 70° в основании конуса;
- ◆ Отрезок \ 0,50 (точка 3) \ 50,50 (точка 4) \ 50,0 (точка 5) \ Замкнуть – построен контур (3, 4, 5) треугольника β с углом в основании 45° .

Строим конусы как солид-объекты:

- ◆ восстановите МСК;
- ◆ Конус  \ Центр основания: 0,0 – это точка 1 \ Радиус: с объектной привязкой укажите точку 2 \ Высота: укажите точку 3 – построен конус α (см. рис. 9.15а);
- ◆ ПСК, Направление оси Z  \ Укажите начальную точку: с объектной привязкой укажите точку 4 (рис. 8.17) \ Точка на положительном луче оси Z : укажите точку 3;
- ◆ Конус \ 0,0 \ Радиус: с объектной привязкой укажите точку 5 \ Высота: укажите точку 3 – построен конус β ;
- ◆ контуры конусов скройте (заморозьте слой, изолируйте или удалите).

Переместите оба конуса, придав общей вершине конусов координаты точки D и повернув конус β так, чтобы его ось стала перпендикулярной Π_2 :

- ◆ восстановите МСК;
- ◆ Перемещение  \ укажите оба конуса \ Базовая точка: 0,0 \ Вторая точка: 50,35 (это основание точки D) – вершина конусов совмещена с маркером точки D ;
- ◆ Поворот  \ укажите конус β \ Базовая точка: укажите маркер точки D \ Угол поворота: 90 – конусы построены и установлены в рабочее положение (см. рис. 9. 15а).

Строим сечение конусов (см. рис. 9.15а, б). Установим ПСК в плоскость сечения Δ :

- ◆ ПСК, Начало  \ с объектной привязкой «Квадрант» укажите точку K ;
- ◆ ПСК, 3 точки  \ Укажите начало координат: 0,0 \ Укажите точку на оси X : с объектной привязкой «Квадрант» укажите точку N \ Укажите точку с положительной Y -координатой: 1,0 – ПСК установлена в плоскость сечения;
- ◆ Сечение  \ Выберите объекты: укажите оба конуса \ опция «3 точки» \ Первая точка на плоскости: 0,0 \ Вторая точка: 1,0 \ Третья точка 0,1 – создано сечение конусов, состоящее из двух областей эллипсов.

Строим касательные к эллипсам сечения (рис. 9.15в). Точное построение можно выполнить только применением объектной привязки «Касательная». Команда «Сечение» создает объекты типа «Область», на которые указанная привязка не действует. Поэтому поверх областей строим объекты «Эллипс», на которые привязка распространяется:

- ◆ оставьте в видовом экране только объекты сечения. Остальные объекты скройте (заморозьте слои или изолируйте);
- ◆ План \ Текущая – установлен вид на объекты сечения (см. рис. 9.15в);
- ◆ Отрезок \ с привязкой «Центр масс» последовательно укажите объекты сечения – построен отрезок, соединяющий центры объектов и являющийся частью общей большой оси эллипсов;
- ◆ за ручки или командой «Увеличение \ Динамика» удлините отрезок большой оси в обе стороны до пересечения с контурами сечений. В режиме «ОРТО» через точки «Центра масс» постройте отрезки малой оси эллипсов;
- ◆ Разбивка  \ укажите области двух объектов сечений – области преобразованы в сплайны;
- ◆ наведите курсор на контуры сечений и убедитесь, что это сплайны.

Строим эллипсы поверх сплайнов и отрезки четырех касательных к эллипсам:

- ◆ Главная \ Эллипс по центру и полуосям  \ Центр эллипса: с привязкой «Пересечение» укажите пересечение осей одного из эллипсов \ Конечная точка полуоси: укажите пересечение одной из осей с контуром сплайна \ Длина другой полуоси: укажите пересечение другой оси с контуром сплайна – построен эллипс, расположенный поверх сплайна;
- ◆ повторите построение для второго эллипса;
- ◆ сплайны удалите – остались два эллипса сечения конусов;
- ◆ постройте четыре отрезка касательных к эллипсам: m, m', n, n' . Конечные точки отрезков указывайте с объектной привязкой «Касательная».

Плоскости, заданные вершиной конусов, точкой D и построенными отрезками касательных к эллипсам, являются решением задачи.

Для повышения наглядности 3D-модели найденные плоскости отобразите треугольниками (рис. 9.15з). Например, для плоскости Σ :

- ◆ постройте 3D-полилинию  по точкам $D, 1, 2$ (см. рис. 9.15в, з) и по ней создайте область .

Для повышения наглядности 3D-модели настройте источники света, подберите цветовое решение, постройте проекцию плоскостей на Π_1 .

Решение на проекционном чертеже

Чертеж (рис. 10.14) построим для нахождения плоскости Σ – одной из четырех плоскостей, являющихся решением задачи (см. рис. 9.15з).

- ◆ По размерам контуров (см. рис. 10.13) постройте проекции конусов α и β (рис. 10.14а).
- ◆ На Π_3 постройте отрезок K_3N_3 как проекцию секущей плоскости Δ .

Построение эллипсов сечений конусов плоскостью Δ

Необходимо найти точки большой и малой осей эллипсов. При компьютерном 2D-варианте достаточно применить команду «Эллипс». При построении на бумаге необходимо строить по точкам.

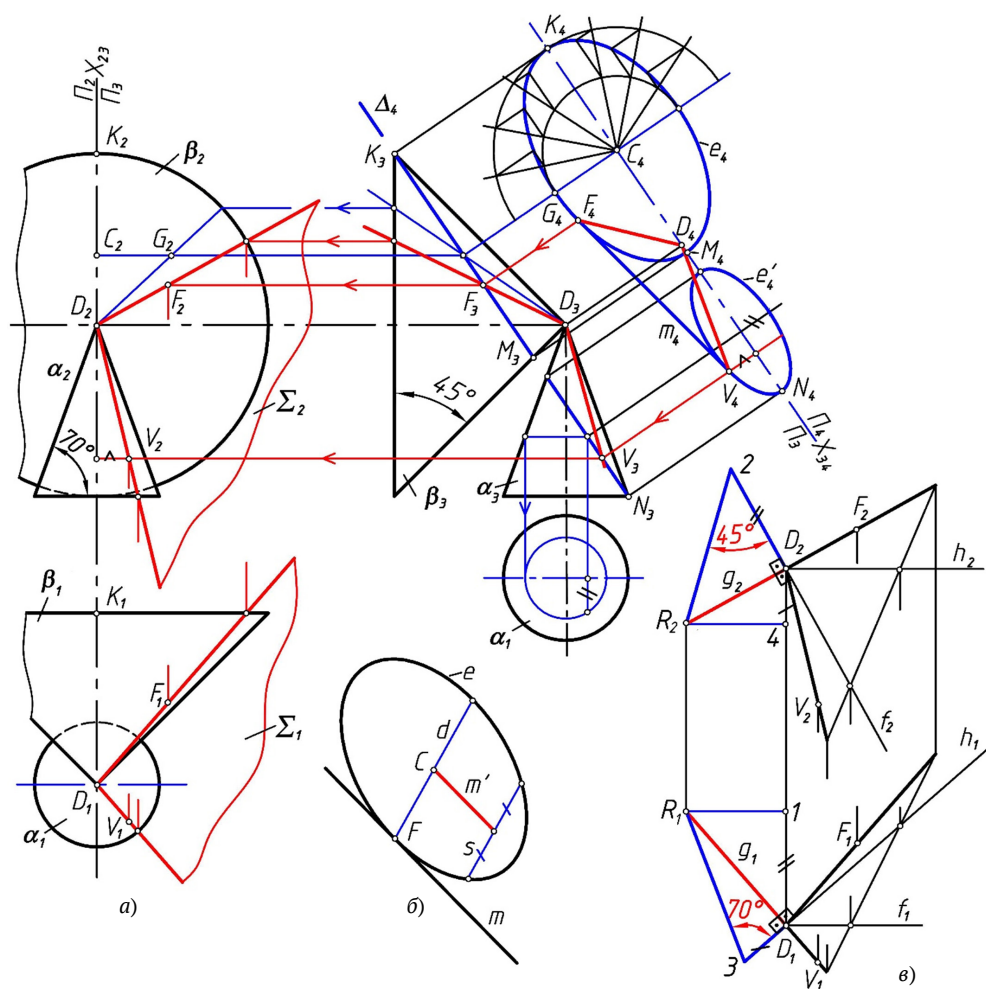


Рис. 10.14. Решение комплексной задачи 14 на проекционном чертеже:
 а – решение; б – построение и проверка касательной к эллипсу, в – проверка решения

- ◆ Вводим дополнительную плоскость $\Pi_4 \parallel \Delta_4$.
- ◆ Строим отрезок $K_4M_4 \parallel K_3M_3$ большой оси эллипса e_4 и его центр C_4 .
- ◆ Строим точку G_4 малой оси эллипса e_4 . Для этого через среднюю точку отрезка K_3M_3 проводим образующую конуса, на Π_2 и находим отрезок C_2G_2 , величину которого откладываем от центра эллипса, точки C_4 .
- ◆ По точкам центра C_4 и точкам осей K_4, G_4 строим эллипс. В компьютерном варианте применяем команду «Эллипс». Иначе строим эллипс по точкам. Точки находим так же, как точку G , на поверхности конуса β как точки его сечения плоскостью Δ . Можно применить известный метод построения точек эллипса, заданного двумя осями, показанный на чертеже для половины эллипса.
- ◆ Постройте второй эллипс e'_4 . Алгоритм построения тот же, что для эллипса e_4 .

Построение касательной к эллипсам

В компьютерном 2D-варианте для отрезка касательной достаточно при указании точек эллипса применить объектную привязку «Касательная».

При построениях циркулем и линейкой общую касательную к эллипсам строят приближенно приложением линейки к построенным эллипсам. Точный геометрический метод не известен.

- ◆ Постройте отрезок внешней касательной m_4 и обозначьте точки касания F_4, V_4 .

Если касательная построена приближенно, то можно ее проверить известным алгоритмом. Пусть необходимо проверить (или построить) касательную m в точке F эллипса e (рис. 10.14б):

- ◆ постройте отрезок d , соединяющий точку касания F с центром эллипса C . Постройте хорду $s \parallel d$. Концы хорды должны быть на контуре эллипса. Отрезком m' соедините центр эллипса со средней точкой хорды.

При точном построении отрезок m' будет параллелен касательной m в проверяемой точке F .

Завершение чертежа

Касательная m и вершина конусов D определяют искомую плоскость Σ и уже являются решением задачи. Однако более наглядным является отображение плоскости Σ отрезками DF, DV , являющимися образующими конусов α, β , по которым найденная плоскость Σ касается их поверхности.

- ◆ Обратными построениями находим фронтальные и горизонтальные проекции отрезков DF, DV .

Проверка решения

Проверка заключается в определении углов между найденной плоскостью Σ и плоскостями Π_1, Π_2 . Для этого из точки D строим перпендикуляр g к плоскости Σ и способом прямоугольного треугольника (см. раздел 7.2.3) определяем углы его наклона к Π_1, Π_2 . Искомые углы являются дополнительными:

- ◆ с чертежа на свободное поле скопируйте проекции отрезков DF, DV плоскости Σ (рис. 10.14в). В плоскости $\Sigma(DF, DV)$ постройте произвольный треугольник. В нем – горизонталь h и фронталь f . Из точки D восстановите перпендикуляр g к плоскости треугольника, задав $g_1 \perp h_1, g_2 \perp f_2$. На нем задайте точку R . Длина отрезка DR может быть произвольной;
- ◆ на проекциях отрезка g , как на катетах, постройте два прямоугольных треугольника. Длину вторых катетов измерьте по другой проекции отрезка: $|D_2, 2| = |D_1, 1|, |D_1, 3| = |D_2, 4|$;
- ◆ простановкой угловых размеров определите искомые значения углов.

В приведенном примере измеренные значения совпали с заданными, т. е. задача решена верно.

- ◆ Сохраните файл 3D-модели и чертежа с именем «Комплексная 14.dwg».

ГЛАВА 11

Геометрические тела (лекция 6)

В этой лекции перейдем от абстрактных объектов – точки, прямой, плоскости – к объемным моделям: многограннику, конусу, сфере, цилиндру, тору. Рассмотрим методы их построения, построение точек на поверхности тел, пересечение тел с прямой линией. Как и в предыдущих главах (лекциях), в большинстве задач для сравнения приведем решение методами начертательной геометрии.

11.1. Типы 3D-геометрических объектов

Для создания моделей геометрических тел в Платформе nanoCAD предусмотрены типы объектов: тела, поверхности, сети (см. также раздел 1.5.1, 1.5.4).

Тела – замкнутые объекты, заполненные условным веществом. Это основной тип объектов в нашем курсе. На объектах этого типа будем изучать геометрические свойства объектов, в том числе особенности линий пересечения геометрических объектов (рис. 11.1а). В главах 7, 9 было показано применение тел при решении метрических и комплексных задач. В последующих курсах инженерной и компьютерной графики на основе тел изучим построение 3D-моделей и автоматическое построение чертежей деталей и узлов машин (рис. 11.1б, в).

Поверхности – это тип объектов, образом которых является тонкая пленка. Поверхность образуется командами выдавливания, вращения, перемещения, если контур является незамкнутым и плоским. Теми же командами поверхность образуется, если в команде задана опция «Режим \ Поверхность». Поверхности мы уже применяли при построении чертежей как 2D-видов (см. раздел 5.2.4), при построении линий пересечения (см. раздел 5.7.2), при построении оболочек (см. раздел 10.10). В нашем курсе мы будем применять объекты этого типа при изучении сложных кинематических поверхностей. В последующих специальных курсах на основе поверхностей рассматривается построение моделей архитектурных сводов (рис. 11.1г, д). Примерами являются ансамбль из гиперболических параболоидов и модель многосекционного параболического свода (рис. 11.1д) – «свод Феликса Канделы».

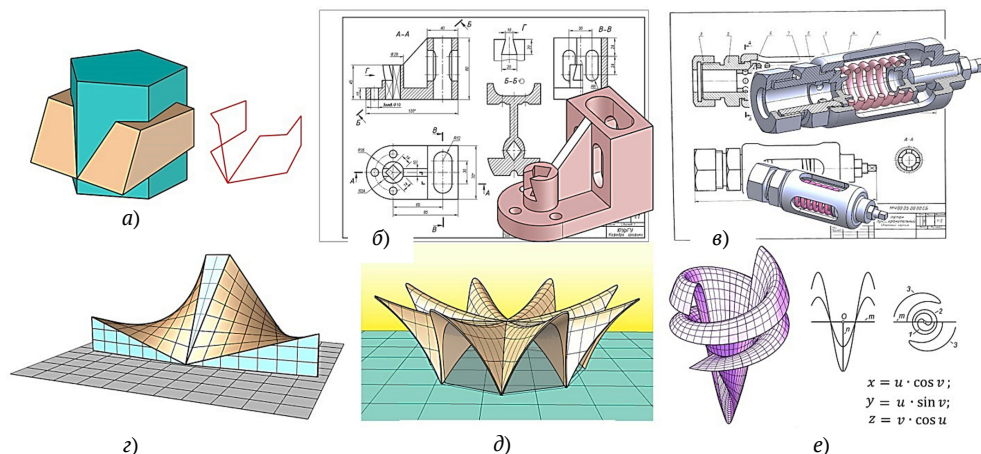


Рис. 11.1. Типы объектов, рассматриваемые в учебном процессе:

- a* – «тела» при исследовании линий пересечения;
- б* – «тела» при построении моделей и автоматизации построения чертежей;
- в* – «тела» при построении моделей узлов, сборочных и рабочих чертежей;
- г, д* – «поверхности» при построении моделей архитектурных сводов;
- е* – «сети» при построении поверхностей, заданных аналитическими выражениями

Сети также могут быть представлены как тонкие пленки. В отличие от поверхностей сеть формируется натянутой на дискретный каркас. *Сети* применяют для воспроизведения сложных поверхностей, получаемых перемещением узлов сети. Перемещения могут быть заданы аналитическими выражениями и реализованы применением программирования на языке AutoLisp, который входит в обеспечение Платформы nanoCAD. Примером является поверхность «Винт Штейнбаха» (рис. 11.1е). Сети будем изучать в последующих курсах компьютерной графики.

- Лектору: покажите в ленточном интерфейсе закладки создания и редактирования объектов различного типа.

11.2. Многогранники

Многогранник – геометрическое тело, со всех сторон ограниченное плоскими гранями – многоугольниками. Линии пересечения граней – ребра, точки пересечения ребер – вершины.

11.2.1. Тела Платона

Существует пять правильных выпуклых многогранников (рис. 11.2). Их называют правильными поскольку гранями их являются одинаковые правильные многоугольники: треугольники, квадраты или пятиугольники. Это тела Платона (IV век до н. э): тетраэдр (4 грани из треугольников, пирамида), гексаэдр (6 граней – квадратов, куб), октаэдр (8 треугольников), додекаэдр (12 пятиугольников) и икосаэдр (20 граней – треугольников).

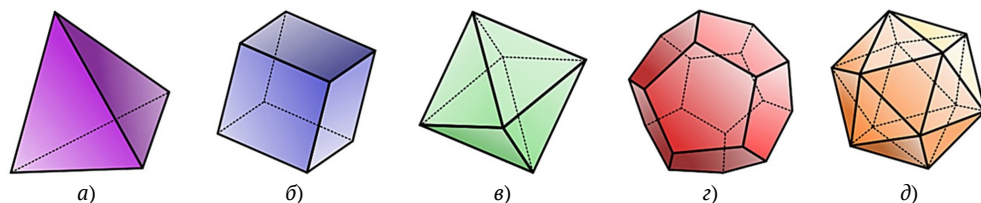


Рис. 11.2. Тела Платона:

а – тетраэдр; *б* – гексаэдр; *в* – октаэдр; *з* – додекаэдр; *д* – икосаэдр

Тела Платона интересны своей историей открытия и познания. В соотношениях параметров найдена «золотая пропорция». В средние века считали, что есть связь геометрии этих тел с орбитами планет солнечной системы. Современная наука находит правильные многогранники в кристаллическом строении материалов, в форме вирусов в биологии. Красота этих многогранников нашла отражение в архитектуре и т. д.

В нашем курсе тела Платона мы рассматриваем как интересные геометрические 3D-модели. В разделе 12.1 приведены алгоритмы построения наиболее сложных и красивых моделей додекаэдра и икосаэдра.

Существуют удивительные геометрические связи между всеми правильными многогранниками. Одна из них состоит в том, что правильные многогранники можно вписывать друг в друга. На рис. 11.3 показана модель, в которой икосаэдр вписан в додекаэдр. При этом вершинами икосаэдра являются центры граней додекаэдра. Алгоритмы построения этих моделей приведены в разделе 12.1.3.

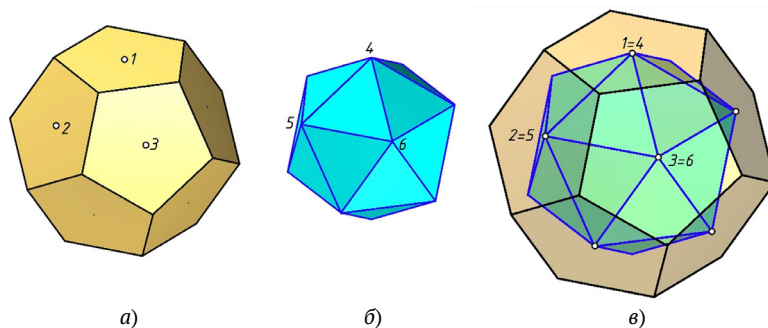


Рис. 11.3. Композиция тел Платона:

а – додекаэдр; *б* – икосаэдр; *в* – икосаэдр, вписанный в додекаэдр

○ Лектору:

- откройте файлы «Додекаэдр .dwg», «Икосаэдр .dwg» и «Додекаэдр и Икосаэдр .dwg». Покажите 3D-модели и дайте комментарии к их построению;
- предложите темы реферативной работы по построению 3D-моделей тел Платона, тел Архимеда и других известных многогранников. Материалы можно найти в интернете.

11.2.2. Пирамида

На примере пирамиды рассмотрим построение 3D-моделей многогранников и решение задач на построение точки на поверхности многогранника, пересечение многогранника с прямой линией и сечение многогранника плоскостью.

Пирамида – многогранник, основание которого – многоугольник, а остальные грани – треугольники, имеющие общую вершину. Пирамида называется правильной, если ее основанием является правильный многоугольник, а вершина проецируется в центр основания. В названии пирамиды указывают количество углов в многоугольнике основания. Например, если в основании треугольник, пирамида *треугольная*. Возможны пирамиды четырехугольные, пятиугольные..., *n*-угольные.

3D-модель пирамиды

Правильная пирамида в Платформе nanoCAD относится к геометрическим примитивам прямого моделирования (см. раздел 1.5.4). Ее построение выполняется командой «Пирамида», которая позволяет строить полную и усеченную пирамиду как солид-объекты. Пример правильной пятиугольной пирамиды приведен ниже в разделе 11.2.3.

Для построения неправильной пирамиды можно применить два варианта. Первый вариант основан на применении команды «Вытягивание по сечениям». Команда строит объект, соединяя набор сечений. Для пирамиды понадобятся два сечения. Первое – многоугольник основания. Второе сечение – многократно уменьшенная копия основания, помещенная в точку вершины. Такой прием позволяет обойти ограничение команды, не позволяющее вытягивать в точку.

По второму варианту построения неправильной пирамиды первоначально строят призму, затем командой «Разрез» отсекают от нее «лишние» объемы. Призму получают либо копированием основания за одну из ее вершин в вершину пирамиды, либо командой «Выдавливание».

Оба алгоритма рассмотрены в разделе 12.2.1 на примере построения неправильной пирамиды, приведенной на рис. 11.4а. Второй алгоритм дополнительно рассмотрен при построении пирамиды, приведенной на рис. 11.6 в разделе 12.2.4.

Точка на поверхности пирамиды

Рассмотрим задачу построения точки на поверхности тела, если для точки задана лишь одна проекция. Это распространенная задача учебного курса. Рассмотрим ее на примере неправильной пирамиды (см. рис. 11.4а) и точек *B* и *D*, заданных своими проекциями B_1 и D_2 .

Поскольку поверхность многогранника образована плоскими гранями, то решение можно получить косоугольным проецированием, как при построении недостающей проекции точки в плоскости (см. раздел 5.4.1). Для многогран-

ника этот алгоритм требует повторений по количеству граней, пересекаемых проецирующей прямой, например для точки D – два раза.

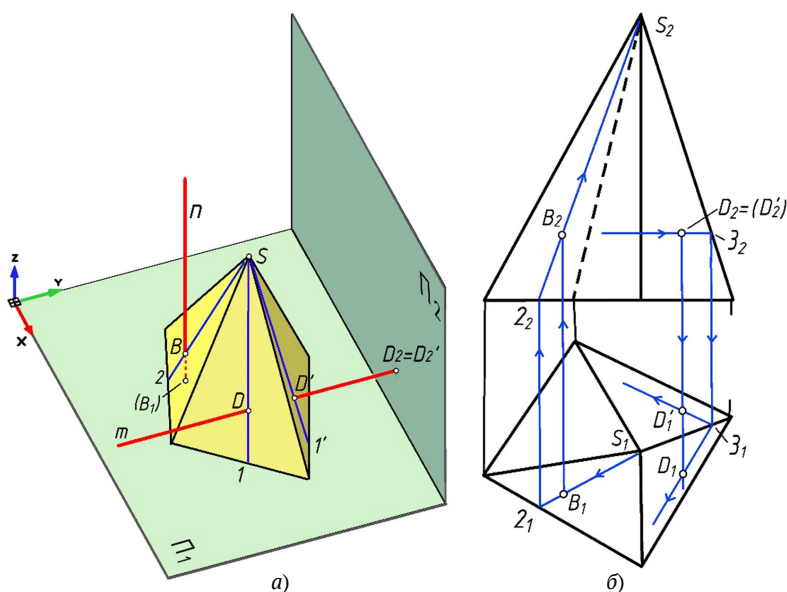


Рис. 11.4. Построение точки на пирамиде:
а – 3D-модель; б – чертёж пирамиды

Рациональным для многогранника является алгоритм, по которому недостающие проекции точки находят на пересечении проецирующей прямой с линией сечения многогранника плоскостью, две точки которой заданы как точки проецирующей прямой. Третья точка секущей плоскости может быть задана произвольно. То есть секущих плоскостей и линий сечения может быть множество, но при пересечении с проецирующей прямой все они приведут к единому результату. Поэтому при компьютерной 3D-реализации секущую плоскость задают из условий наглядности, а в алгоритме начертательной геометрии – из условия минимального количества построений на чертеже, выполняемых с помощью циркуля и линейки.

Для пирамиды за третью точку секущей плоскости принимают вершину пирамиды. Например, для нахождения на поверхности пирамиды точки B , заданной горизонтальной проекцией B_1 (см. рис. 11.4а), из B_1 построен отрезок n , перпендикулярный Π_1 . Командой «Сечение» задана секущая плоскость тремя точками: вершиной S и любыми двумя точками отрезка n . В сечении получен отрезок $(S, 2)$. Искомая точка B получена на пересечении отрезков n и $(S, 2)$.

Для нахождения на поверхности пирамиды точки D , для которой задана фронтальная проекция D_2 , построен отрезок $m \perp \Pi_2$ и $m \supset D_2$. Построено сечение пирамиды плоскостью (S, m) . В сечении получены отрезки $(S, 1)$ и $(S, 1')$. На пересечении этих отрезков с отрезком m определены искомые точки D, D' , имеющие своей проекцией точку D_2 .

Алгоритм построения точек B, D, D' приведен в разделе 12.2.1. На рис. 11.4б приведен чертеж пирамиды и построение тех же точек на проекционном чертеже. Пояснения к чертежу даны в разделе 12.2.2.

- Лектору: откройте файл «Пирамида и точка .dwg» (см. раздел 12.2.1). Поясните построение неправильной пирамиды и точек на ее поверхности.

11.2.3. Пересечение многогранника с прямой линией

Точки пересечения находятся с помощью вспомогательной секущей плоскости на пересечении заданной прямой с линией сечения. Сечение выполняется командой «Сечение». Секущая плоскость должна содержать в себе заданную прямую. Таких плоскостей и сечений множество, все они приводят к единому результату. Для пирамиды – это две точки пересечения.

На рис. 11.5а показано определение точек пересечения отрезка прямой m с правильной пятиугольной пирамидой. Приведено два варианта решения. По первому варианту секущая плоскость задана двумя точками отрезка m и точкой вершины S . В сечении получены отрезки a, b . На пересечении этих отрезков с отрезком m получены две искомые точки A, B пересечения отрезка m с пирамидой.

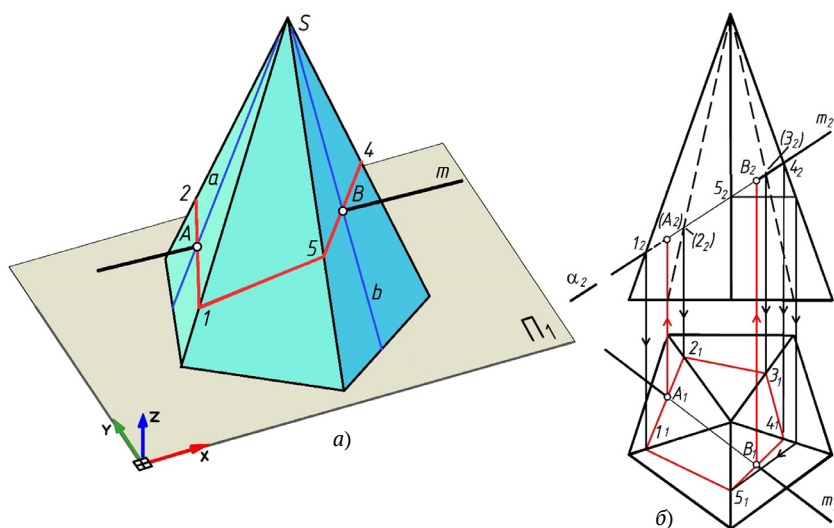


Рис. 11.5. Пересечение пирамиды с прямой линией: а – 3D-алгоритм; б – чертеж

По второму варианту секущая плоскость задана фронтально проецирующей плоскостью, содержащей отрезок m . В сечении получен пятиугольник 1-2-3-4-5. На пересечении его сторон с отрезком m получены искомые точки A, B . Этот вариант приведен для пояснения решения на проекционном чертеже (рис. 11.5б), в котором применена та же секущая плоскость α .

На рис. 11.5б приведено решение на проекционном чертеже. Параметры и построение 3D-модели и пояснения к чертежу приведены в разделе 12.2.3.

- Лектору: откройте файл «Пересечение пирамиды с прямой .dwg» (раздел 12.2.3). Поясните построение точек пересечения.

11.2.4. Сечение многогранника (пирамиды) плоскостью

Сечение многогранника плоскостью, в том числе пирамиды, представляет собой замкнутый многоугольник, количество сторон которого равно количеству пересекаемых граней. Вершины многоугольника образованы точками пересечения ребер многогранника с плоскостью сечения.

По 3D-алгоритму сечение тел плоскостью выполняется командой «Сечение». Секущую плоскость задают либо тремя точками, либо опциями ПСК.

На рис. 11.6а показано построение сечения треугольной неправильной пирамиды. Секущая плоскость задана отрезками $a \cap b$. Выполнена команда «Сечение» с опцией «3 точки». Точки плоскости сечения заданы как конечные точки отрезков a, b . Образовано сечение как объект «Область». Поскольку пересечение произошло по четырем граням (три боковые грани и основание), то образован четырехугольник. Для наглядности сечение скопировано на свободное место экрана.

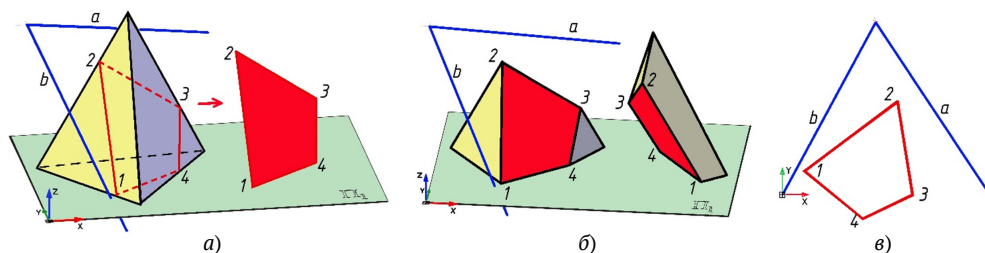


Рис. 11.6. Сечение пирамиды плоскостью:
а – 3D-модель сечения; б – разрез; в – истинный вид сечения

Можно построить разрез пирамиды, применив команду «Разрез» (рис. 11.6б). Плоскость разреза задается так же, как плоскость сечения. В результате разреза пирамида разделена на две части. Верхнюю часть пирамиды для наглядности переместили и повернули вокруг вертикальной оси.

Построение истинного вида сечения

Истинный вид сечения – изображение, в котором сечение отображено без искажения. Для этого направление взгляда (направление отображения на экране или направление проецирования на чертеже) должно быть перпендикулярно плоскости сечения (рис. 11.6в). Для построения истинного вида в плоскость сечения следует установить плоскость ХУ ПСК и выполнить команду «План». Истинный вид сечения позволяет наглядно передать его форму, выполнять построения и измерения в плоскости сечения.

Алгоритм построения 3D-моделей и проекционный чертеж приведены в разделе 12.2.4.

- Лектору: откройте файл «Сечение пирамиды плоскостью .dwg» (см. раздел 12.2.4). Поясните построение 3D-модели и проекционного чертежа.

11.2.5. Призма

Призма – многогранник, две грани которого, называемые основаниями, представляют собой равные многоугольники, расположенные в параллельных плоскостях. Ребра, не лежащие в этих плоскостях, называемые боковыми ребрами, параллельны между собой. *Правильная призма* имеет в основании правильный многоугольник. *Прямая призма* имеет ребра, перпендикулярные плоскости оснований. Иначе призма *неправильная* или *наклонная*. В названии призмы указывают количество углов в ее основании или количество боковых ребер. Например, если в основании треугольник, то призма *треугольная*.

Правильную прямую призму можно построить командой «Пирамида» как правильную усеченную пирамиду с равными верхним и нижним основаниями.

Призму в общем случае (т. е. неправильную и наклонную) можно построить командой «Выдавливание». Для этого следует начертить замкнутый многоугольник основания и отрезок одного из ребер. Многоугольник должен быть полилинией или областью. К основанию применяем команду «Выдавливание» с опцией «Траектория». Та же команда по умолчанию (без опции «Траектория») строит прямую призму.

На рис. 11.7 показано построение 3D-модели и чертежа неправильной наклонной четырехугольной призмы (рис. 11.7). Ее основанием является неправильный четырехугольник $ABCD$, расположенный в плоскости Π_1 (рис. 11.7a). Одним из боковых ребер является отрезок прямой b . Основание построено как замкнутая полилиния. Из вершины B построен отрезок b . Применена команда «Выдавливание» основания по траектории b .

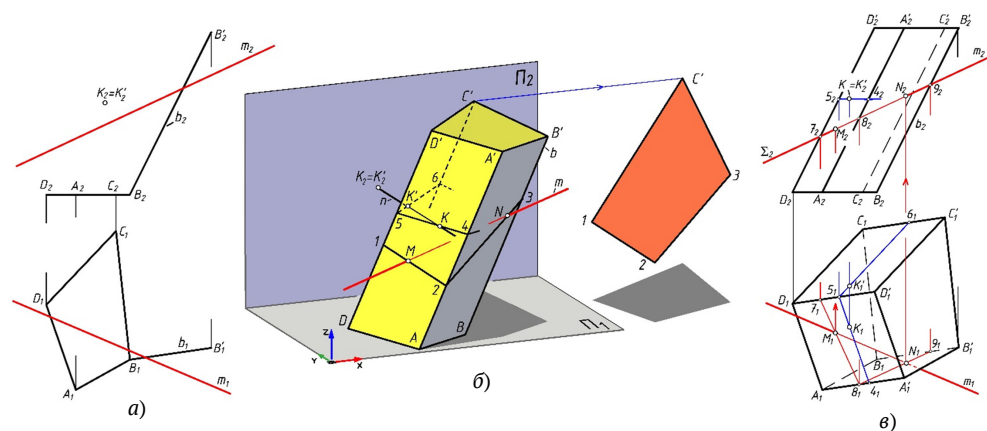


Рис. 11.7. Построение наклонной призмы: а – дано; б – 3D-модель; в – чертеж

Показано решение типовых задач: построение точки на поверхности призмы, пересечение призмы с прямой и построение сечения. Алгоритмы те же, что были рассмотрены для пирамиды.

Построены точки на поверхности призмы, если задана фронтальная проекция K_2 этих точек. Из точки K_2 построен отрезок $n \perp \Pi_2$. Построено сечение

призмы горизонтальной плоскостью, проходящей через точку K_2 . Сечение содержит отрезки (4, 5) и (5, 6). На пересечении этих отрезков с отрезком n найдены точки K, K' , для которых точка K_2 является фронтальной проекцией.

Для определения точек пересечения прямой общего положения m с поверхностью призмы командой «Сечение» построено сечение призмы плоскостью, две точки которой заданы на прямой m , третья точка плоскости выбрана произвольно как вершина верхнего основания призмы, точка C' . Получен четырехугольник сечения (1, 2, 3, C'). Его пересечение с прямой m выявило точки M, N , в которых прямая пересекает поверхность призмы. Для наглядности область четырехугольника сечения скопирована на свободное место.

Параметры модели призмы и алгоритмы построений приведены в разделе 12.2.5. Там же приведены пояснения к построению проекционного чертежа призмы.

Параллелепипед – многогранник, у которого все грани являются параллелограммами. Это частный случай призмы. Параллелепипед может быть прямым или наклонным. Для построения прямого параллелепипеда предназначена команда «Параллелепипед» . Эта команда позволяет также построить куб как частный случай параллелепипеда. Для наклонного параллелепипеда следует применить рассмотренные выше команды «Выдавливание» или «Вытягивание по сечениям».

В разделе 2.13.6 было приведено построение наклонного параллелепипеда. Экспериментально показано, что все четыре диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке, в ней делятся пополам, и эта точка является центром масс параллелепипеда.

В разделе 12.2.6 рассмотрено еще одно свойство параллелепипеда. Его можно построить, если заданы направления трех его ребер как скрещивающихся прямых.

○ Лектору:

- откройте файл «Призма наклонная .dwg» (см. раздел 12.2.5). Поясните построение 3D-модели призмы и ее проекционного чертежа;
- откройте файл «Параллелепипед .dwg» (см. раздел 12.2.6). Поясните построение параллелепипеда, заданного тремя скрещивающимися прямыми.

11.3. Конус

Конус – геометрическое тело, заключенное внутри конической поверхности и ограниченное плоскостью – основанием.

Коническая поверхность образована движением прямой, проходящей через неподвижную точку и кривую линию. Точка – вершина конуса, линия – направляющая конуса. Отрезки, соединяющие вершину с направляющей – образующие конуса. Пример конической поверхности показан на рис. 11.8а. Поверхность формируется движением отрезка ($S, 1$). Нижняя точка 1 перемещается по кривой m . Верхняя точка совмещена с точкой S .

В зависимости от направляющей линии различают круговой, эллиптический, гиперболический и другие варианты конуса. Если перпендикуляр, опущенный

из вершины на основание, проходит через центр симметрии основания, конус называют прямым, иначе наклонным. Конус может быть усеченным, т. е. иметь верхнее основание, параллельное нижнему основанию.

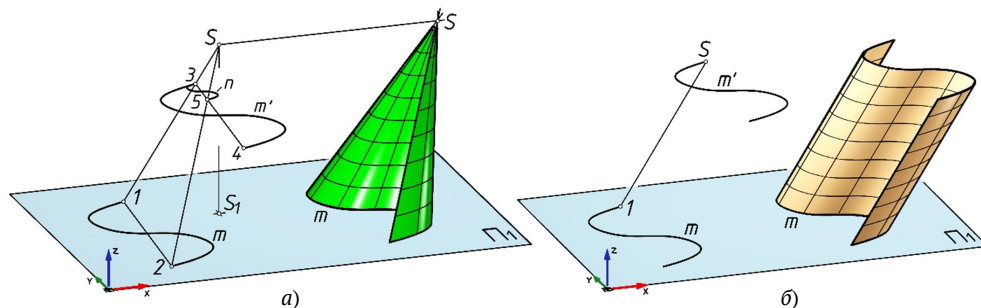


Рис. 11.8. Поверхности коническая (а) и цилиндрическая (б)

Основной вариант построения 3D-модели конуса – применение команды «Конус» , которая позволяет создать прямой конус, круговой или эллиптический, с вершиной или усеченный.

Круговой конус можно построить вращением прямоугольного треугольника вокруг его катета, применив команду «Вращение» .

Конус с произвольным основанием, прямой или наклонный, можно построить командой «Выдавливание»  или «Вытягивание по сечениям» , подобно построению пирамиды с произвольным основанием (см. выше, раздел 11.2.2) и построению поверхностей (см. выше рис. 11.8).

Построение точек на поверхности конуса и точек пересечения прямой линии с поверхностью конуса выполняется так же, как для пирамиды и призмы (см. выше рис. 11.4–11.7). Для построения точки, заданной одной проекцией, строим проецирующую прямую и находим точки ее пересечения с поверхностью конуса.

На рис. 11.9а показано определение точек M, N пересечения прямой m с поверхностью конуса. Приведено три варианта решения. В каждом построено сечение конуса плоскостью, содержащей прямую m , т. е. две ее конечные точки. Показано, что положение третьей точки секущей плоскости может быть произвольным. В первом варианте решения третья точка задана в вершине конуса S . В сечении получены образующие $(S, 5)$ и $(S, 6)$, пересечение которых с отрезком m определяет точки M, N . По второму варианту третья точка задана на горизонтальной проекции отрезка m_1 . Плоскость сечения является горизонтально проецирующей и параллельной оси конуса. В сечении получена гипербола h , пересечение которой с отрезком m также дает точки M, N . В третьем варианте точка секущей плоскости задана на фронтальной проекции отрезка m_2 . Плоскость является фронтально проецирующей. В сечении получен эллипс e , пересечение которого с прямой m приводит к тем же точкам M, N .

В разделе 12.3 приведены алгоритмы построения 3D-моделей поверхностей (раздел 12.3.1) и конуса в пересечении с прямой линией (раздел 12.3.2). В раз-

деле 12.3.3 приведены пояснения к построению чертежей, показанных на рис. 11.9б, в.

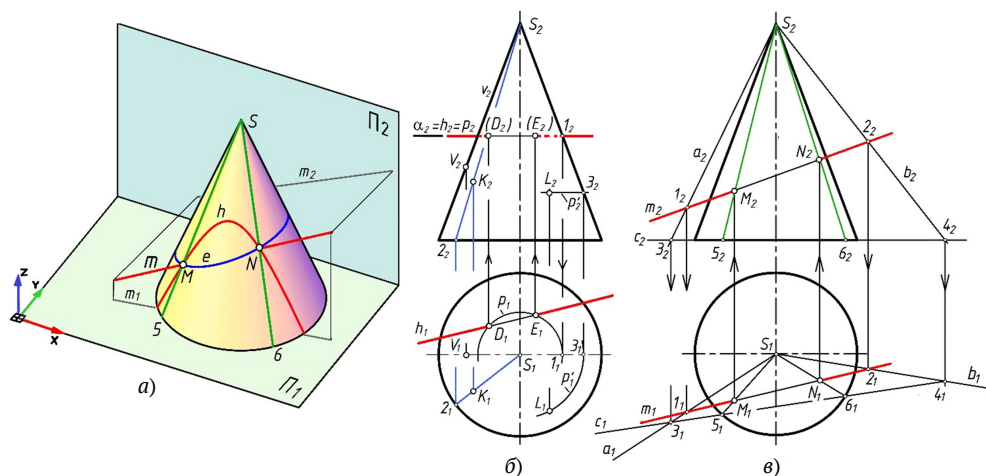


Рис. 11.9. Пересечение прямой с конусом:
а – 3D-модель; б – чертеж для горизонтали и точки на поверхности конуса;
в – чертеж для прямой общего положения

- Лектору: откройте файлы «Коническая и цилиндрическая поверхности .dwg» и «Конус .dwg» (см. раздел 12.3). Поясните построение конической поверхности, определение точек пересечения конуса с прямой по 3D-модели и по чертежу.

11.4. Цилиндр

Цилиндр – геометрическое тело, ограниченное цилиндрической поверхностью и двумя взаимно параллельными плоскостями, пересекающими ее. Цилиндрическая поверхность (см. выше рис. 11.8б) образована плоскопараллельным перемещением прямой линии ($S, 1$), называемой «образующей», одна точка которой движется по произвольной кривой линии m – «направляющей». Типы цилиндров: цилиндр вращения (образующая вращается вокруг неподвижной оси), эллиптический цилиндр (направляющая – эллипс), прямой или наклонный цилиндр – в зависимости от угла, под которым основания пересекают образующие цилиндра.

3D-модель прямого цилиндра создается командой «Цилиндр» . Это может быть круговой или эллиптический цилиндр. Цилиндр вращения можно создать командой «Вращение» , вращая прямоугольник вокруг одной из его сторон. Можно применить команду «Конус», задав усеченный конус с равными основаниями, или команду «Выдавливание по сечениям»  с равными контурами двух сечений как оснований цилиндра. Цилиндр с произвольным основанием, прямой или наклонный, можно построить, применив команду «Выдавливание» .

Точки, для которых задана одна проекция, можно, как и для пирамиды и призмы (см. выше рис. 11.4, 11.7), перенести на поверхность цилиндра, построив проецирующую прямую и найдя точки ее пересечения с цилиндром.

Для определения точек пересечения прямой с цилиндром следует задать секущую плоскость, двумя точками которой являются точки отрезка прямой, третья точка – произвольная. Затем найти точки пересечения прямой с полученным сечением. На рис. 11.10а показано определение точек A, B пересечения прямой m с поверхностью цилиндра. Приведено два варианта решения. В первом – секущая плоскость задана по двум точкам отрезка m и одной из точек отрезка m_1 . В сечении получен прямоугольник r . Во втором варианте плоскость задана двумя точками отрезка m и произвольной точкой отрезка m_2 . В сечении получен эллипс e . Отрезки m_1, m_2 являются соответственно горизонтальной и фронтальной проекцией отрезка m .

Сечением цилиндра плоскостью может быть прямоугольник или эллипс. Прямоугольник (см. рис. 11.10а) образуется, если секущая плоскость параллельна оси цилиндра. Иначе образуется эллипс. Если плоскость перпендикулярна оси, в сечении образуется окружность (как частный случай эллипса). Построение сечений выполняется командой «Сечение». Для наглядности сечение можно вынести или скопировать на свободное место.

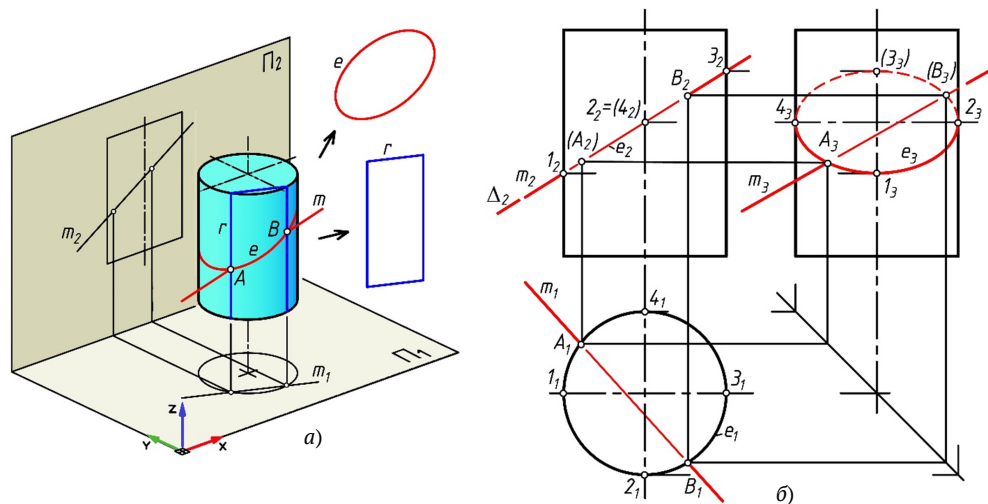


Рис. 11.10. Цилиндр: а – 3D-модель; б – чертёж

Чертёж цилиндра вращения (рис. 11.10б) содержит окружность как его горизонтальную проекцию и прямоугольники фронтальной и профильной проекций. Показанный цилиндр является проецирующей поверхностью относительно плоскости Π_1 , поэтому горизонтальные проекции любых точек на поверхности принадлежат проекции основания – окружности. Две другие проекции находятся по проекционной связи.

Для построения на чертеже точек пересечения отрезка прямой m с поверхностью цилиндра находим проекции этих точек A_1, B_1 на окружности основания

и по проекционной связи находим их фронтальную и профильную проекции по принадлежности к одноименным проекциям отрезка m .

Сечением цилиндра фронтально проецирующей плоскостью Δ является эллипс e . Его фронтальная проекция e_2 – отрезок прямой. Горизонтальная проекция e_1 – окружность основания цилиндра. Профильная проекция e_3 получена построением точек по фронтальной и горизонтальной проекциям.

Алгоритм построения 3D-модели и чертежа приведен в разделе 12.4.

- Лектору: откройте файл «Цилиндр.dwg» (см. раздел 12.4.). Поясните построение точек пересечения прямой с цилиндром и построение чертежа.

11.5. Сфера

Сфера – геометрическое тело, ограниченное сферической поверхностью. **Сферическая поверхность** – множество (или геометрическое место) точек, равноудаленных от одной точки, называемой центром этой поверхности. Возможно другое определение. **Сферическая поверхность** образуется вращением окружности вокруг своего диаметра.

11.5.1. Свойства сферы и основные определения

Любой отрезок, проходящий через центр сферы, может быть принят за ось вращения. Как правило, за ось сферы принимают отрезок горизонтально проецирующей прямой i (рис. 11.11а) – это вертикальная ось сферы.

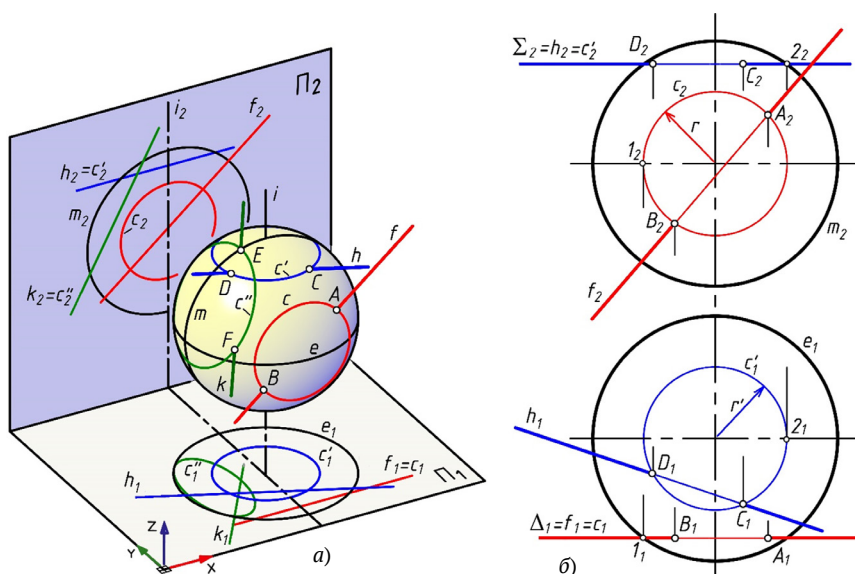


Рис. 11.11. Сфера: а – 3D-модель; б – чертеж

Сечения сферы плоскостью – всегда окружности. Окружности, перпендикулярные оси вращения, называют *параллелями*. Параллель наибольшего диа-

метра, проходящая через центр сферы, – это *экватор сферы* (окружность e на рис. 11.11а). Окружности, ось которых совпадает с осью сферы, называют *меридианами*. Меридиан, параллельный фронтальной плоскости Π_2 , называют *главным меридианом* – это окружность m .

В зависимости от положения секущей плоскости окружность, являющаяся сечением сферы, может отображаться на плоскости проекций в истинном виде, т. е. как окружность, иначе она может быть отображена как отрезок прямой линии или как эллипс. Например (см. рис. 11.1а), проекцией окружности s , плоскость которой параллельна Π_2 , является окружность s_2 , ее проекцией на Π_1 является отрезок прямой s_1 . Параллель s' отображается на Π_1 в окружность s'_1 , на Π_2 – в отрезок s'_2 . Окружность s'' , плоскость которой является фронтально проецирующей, на Π_1 отображается в эллипс s''_1 .

Ортогональные проекции сферы – это окружности. Горизонтальная проекция сферы – это проекция экватора e_1 (см. рис. 11.11а), фронтальная проекция сферы – это проекция главного меридиана m_2 .

При косоугольном проецировании сферы на плоскость в проекции образуется эллипс.

11.5.2. 3D-модель сферы

Сферу как геометрическое тело (солид) можно построить командой «Сфера» . Можно применить команду «Вращение» и вращать дугу полуокружности вокруг замыкающего ее диаметрального отрезка прямой. Если дугу и отрезок предварительно объединить в область, то при вращении образуется солид-объект. Иначе образуется объект-поверхность, из которого можно построить тонкостенную оболочку, применив команду «Толщина».

Точки на сфере, заданные своей одной проекцией, а также точки пересечения сферы с прямой линией находим построением сечений, как и в рассмотренных выше примерах пирамиды, призмы, цилиндра. Сечение выполняется командой «Сечение» с опцией «3 точки», при этом две точки указывают на прямой линии, третья точка – произвольная. В результате сечения на поверхности сферы образуются окружности, которые в пересечении с прямыми образуют искомые точки пересечения прямой со сферой.

Например (см. рис. 11.11а), для определения точек A, B пересечения отрезка фронтали f со сферой сечение построено перпендикулярно Π_1 . Для фронтали это сечение является параллельным Π_2 . На поверхности сферы получена окружность s , проекция которой на Π_1 совпадает с проекцией отрезка прямой f_1 , на Π_2 – отображена в истинном виде как окружность m_2 .

Точки C, D пересечения горизонтали h со сферой получены при построении сечения сферы горизонтальной плоскостью. Окружность s' , построенная в этом сечении, на Π_1 отображена в истинном виде как окружность s'_1 , на Π_2 – как часть отрезка h_2 .

Точки E, F пересечения со сферой отрезка прямой общего положения k определены построением сечения, перпендикулярного Π_2 . На Π_2 сечение совпадает с проекцией отрезка k_2 , на Π_1 – отображается как эллипс s''_1 .

11.5.3. Чертеж сферы

Очерк горизонтальной проекции сферы – экватор e_1 (рис. 11.11б). Очерк фронтальной проекции – главный меридиан m_2 .

Для построения точек на поверхности сферы вводят параллели, проходящие через заданную проекцию искомой точки. Например, если заданы горизонтальные проекции точек A_1 или B_1 , то для построения фронтальных проекций этих точек находят точку 1_1 , по проекционной связи – точку 1_2 , строят окружность c_2 радиуса r . Фронтальные проекции искомых точек A_2 или B_2 определяют по проекционной связи, по принадлежности окружности c_2 .

Если заданы фронтальные проекции точек C_2 или D_2 , то горизонтальные проекции C_1, D_1 находят построением параллели c'_1 , радиус которой r' определяют построением проекций точки 2.

Для определения точек пересечения прямых линий со сферой применяют алгоритм первой позиционной задачи. Например (см. рис. 11.11б), для фронтали f введена секущая плоскость Δ (фронтальная плоскость уровня), найдена линия ее пересечения со сферой – окружность c . На пересечении фронтальных проекций f_2 и c_2 найдены фронтальные проекции точек пересечения A_2, B_2 . По проекционной связи найдены горизонтальные проекции точек пересечения A_1, B_1 . Эти построения наглядно показаны на 3D-модели (см. рис. 11.11а).

Для горизонтали h введена секущая плоскость Σ (горизонтальная плоскость уровня), построена параллель c' . Радиус параллели r' определен по точке 2. На пересечении горизонтальных проекций h_1 и c'_1 найдены горизонтальные проекции искомых точек пересечения C_1, D_1 . Затем по проекционной связи найдены фронтальные проекции C_2, D_2 .

Построение на чертеже точек пересечения прямой общего положения k со сферой и построение сечения сферы проецирующей плоскостью приведено в разделе 12.5.

В разделе 12.6 приведены алгоритмы, 3D-модели и чертеж построения сферы, заданной своими 4 точками.

○ Лектору:

- предложите задачу-загадку: на видах спереди и сверху – окружности, но не сфера. Что это за геометрическая фигура? Предложите построить 3D-модель такой фигуры;
- откройте файл «Сфера .dwg» (см. раздел 12.5). По 3D-модели и чертежам поясните построение точек на сфере и точек пересечения с прямой;
- откройте файл «Сфера по 4 точкам .dwg» (см. раздел 12.6). Покажите построение 3D-моделей и чертежа.

11.6. Конические сечения – коники

Сечения конуса плоскостью называют кониками. Коники – это эллипс, парабола, гипербола. Кроме конуса, коники образуются при сечении плоскостью всех поверхностей второго порядка: цилиндра, сферы, эллипсоида, параболоида, гиперболоида. Коники образуются и как линии взаимного пересечения этих поверхностей, в особых случаях пересечения.

Изучение коник – это история развития геометрии, восходящая к IV в. до н. э. Основы были заложены древнегреческими геометрами: Менехмом (IV в. до н. э.), Аполлонием Пергским (III в. до н. э.). Исследования продолжаются и в наше время. Сегодня изучение коник входит в подготовку студентов вузов. Коники изучают в курсах аналитической геометрии как кривые второго порядка и в геометрии как линии, входящие в пространственную форму машиностроительных деталей и архитектурно-строительных объектов.

Приведем определение коник.

Эллипс – коническое сечение, которое образуется, если секущая плоскость пересекает все образующие конуса.

Примером является секущая плоскость Σ , которая пересекает все образующие нижней чаши конуса и приводит к образованию эллипса e (рис. 11.12а).

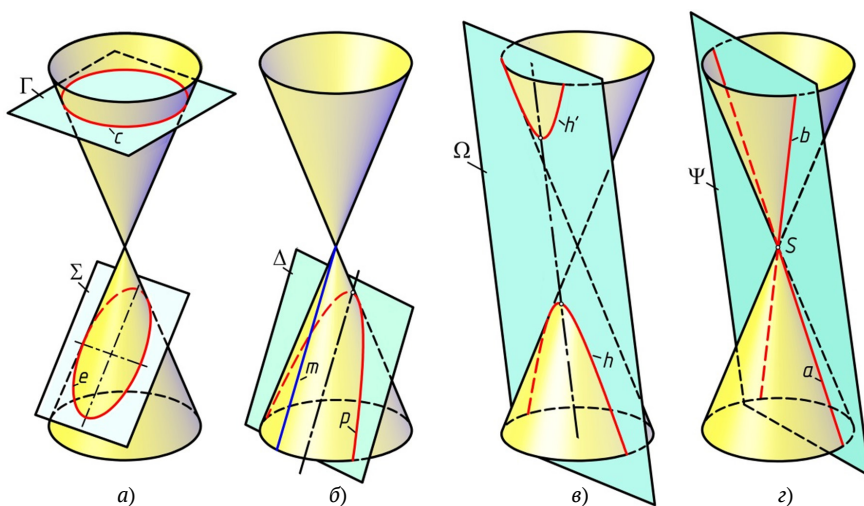


Рис. 11.12. Типы конических сечений в зависимости от положения секущей плоскости: а – эллипс; б – парабола; в – гипербола; г – две прямые линии

Если плоскость, пересекая все образующие конуса, перпендикулярна оси конуса, например плоскость Γ , то в сечении образуется окружность c , которую можно рассматривать как частный случай эллипса.

Парабола – коническое сечение, которое образуется, если плоскость сечения параллельна одной (и только одной) образующей конуса.

Примером является плоскость Δ (рис. 11,12б), параллельная образующей конуса m и пересекающая только одну (в примере – только нижнюю) чашу конуса. Сечением конуса плоскостью Δ является парабола p .

Гипербола – коническое сечение, возникающее, если секущая плоскость пересекает верхнюю и нижнюю чаши конуса.

Гипербола имеет две ветви. Обе ветви образуются, если конус содержит две чаши (рис. 11.12в) и секущая плоскость пересекает обе чаши. Примером является плоскость Ω , которая пересекает обе чаши конуса и образует в сечении гиперболу, содержащую две ветви h и h' .

Сечение по двум прямым – это сечение возникает, если секущая плоскость пересекает конус и при этом проходит через его вершину. Примером является плоскость Ψ , которая пересекает конус по двум прямыми линиями a , b (рис. 5.10г), являющимися образующими конуса.

Частные случаи коник. Если плоскость, образующую эллипс, приближать к вершине, то эллипс сжимается в точку, т. е. точка вершины – вырожденный эллипс. Если плоскость, образующую параболу, приближать к вершине, ветви параболы сжимаются в две совпадающие образующие конуса. Если приближать к вершине плоскость гиперболы, то в предельном случае гипербола преобразуется в свои асимптоты в виде двух образующих конуса.

В разделе 12.7 рассмотрено построение 3D-моделей, приведенных на рис. 11.12, построение коник, определение их параметров и ряд свойств.

В разделах 12.8 и 12.9 приведены две исторические теоремы о свойствах коник.

○ Лектору:

- откройте файл «Построение коник .dwg» (см. раздел 12.7) и поясните построение коник;
- откройте файл «Данделен .dwg» (см. раздел 12.8). Поясните теорему Данделена;
- постройте эллипс командой «Эллипс» и определите его точки фокуса по алгоритму, приведенному на рис. 12.9д;
- откройте файл «Паскаль .dwg» (см. раздел 12.9). Постройте шестиугольник и прямую Паскаля для эллипса, задав один из вариантов нумерации точек.

11.7. Тор

Тор – поверхность, образованная вращением окружности вокруг прямой, расположенной в ее плоскости, но не являющейся ее диаметром.

Если прямая i (рис. 11.13а), являющаяся осью вращения, находится вне окружности c , то образуется открытый тор («тор-кольцо»). Если ось вращения касается окружности, образуется закрытый тор, при котором отверстие в торе смыкается. Если ось i пересекает окружность, отсекая от нее дугу a , то образуется самопересекающийся тор (рис. 11.13б, в). Вариант (рис. 11.13б) называют веретенообразным тором. Поверхность, являющаяся внутренней частью открытого тора, – это поверхность глобоида (рис. 11.13г).

Если ось вращения проходит через центр окружности, образуется сфера, которую можно рассматривать как частный случай тора.

Окружность c – образующая окружность. Окружность, по которой перемещается центр образующей окружности, – направляющая окружность. Сечения тора, перпендикулярные оси тора, – параллели. Параллель наибольшего радиуса открытого или самопересекающегося тора – экватор.

Модель открытого тора (см. рис. 11.13а) можно построить командой «Тор», которая строит тор как солид-объект. Можно применить команду «Вращение», которая позволяет построить и тор-солид, и объект тор-поверхность.

Для построения самопересекающихся торов (рис. 11.13б, в) следует применить команду «Вращение», предварительно создав замкнутый контур вращения из дуги a образующей окружности c и отрезка прямой линии (1-2), соединяющей концы дуги. Перед вращением контур следует объединить в область.

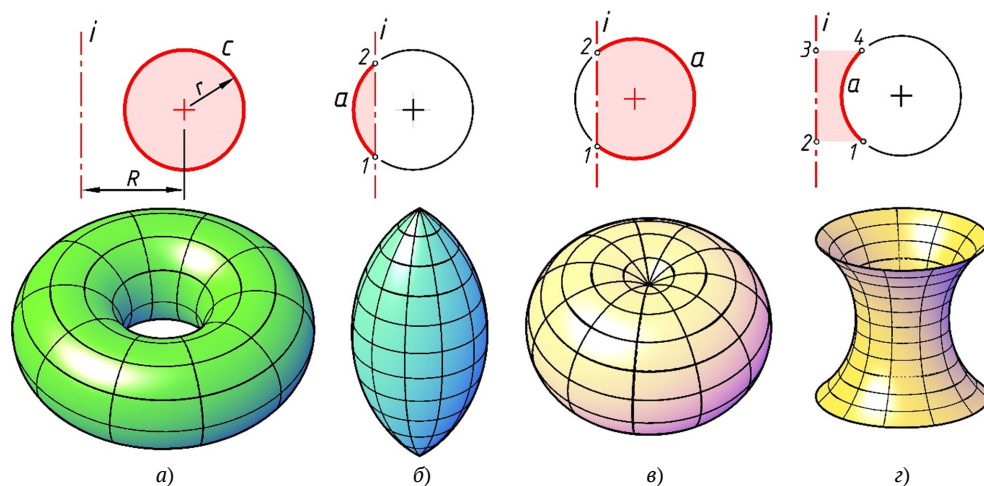


Рис. 11.13. Типы тора: а – открытый; б, в – самопересекающийся; г – глобоид

Для построения глобоида как замкнутого тела следует создать замкнутый контур из дуги окружности a и отрезков (1, 2), (3, 4) верхнего и нижнего оснований и отрезка (2, 3) оси вращения. Преобразовать контур в область. Затем применить команду «Вращение».

Команда «Вращение» позволяет строить как тела (солиды), так и пустотелые объекты – поверхности. Для построения тел контур вращения должен быть замкнутым и в команде указан режим «Тело». Для поверхностей контур вращения может быть незамкнутым или выбран режим «Поверхность». Примером поверхности является глобоид (рис. 11.13г), образованный вращением одной дуги (без замыкающего контура).

Точки на торе, точки пересечения прямой линии с тором, а также сечения тора плоскостями находят так же, как на конусе, цилиндре или сфере (см. выше, разделы 11.3–11.5). Например, параллели p и p' (рис. 11.14а) получены сечением тора горизонтальной плоскостью. Точки $A...D$ пересечения горизонтали h с тором получены как пересечение h с параллелями p, p' .

В разделе 12.10 рассмотрено построение 3D-моделей, приведенных на рис. 11.13. Показано решение трех типовых задач на построение точек и сечения тора на проекционном чертеже тора.

- Лектору: откройте файл «Тор .dwg» (см. раздел 12.10). Поясните построение 3D-моделей и чертежа тора.

11.8. Сечения тора

Изучение сечений тора было начато древними греками, отсюда общее название сечений тора «спирические кривые» (от лат. *spira* – тор) и название части этих кривых в честь древнегреческого геометра Персея (II в. до н. э.). Исследование этих замечательных кривых было продолжено в XVII–XIX вв., поэтому некоторые кривые носят название в честь европейских ученых того времени.

Рассмотрим сечения на примере открытого тора. На рис. 11.14 показаны положения секущих плоскостей и истинные виды получаемых сечений.

Круговые сечения тора

Два варианта таких сечений. Первый вариант возникает, если секущая плоскость перпендикулярна оси тора. Образуются круговые сечения в виде кольца, называемые параллелями. Построение параллелей – основной метод нахождения точек на проекционном чертеже тора (см. рис. 12.11а, б). Второй вариант круговых сечений образован плоскостями, проходящими вдоль оси тора, например (рис. 11.14а, е) плоскость α проходит вдоль оси тора. В сечении возникают две образующие окружности тора.

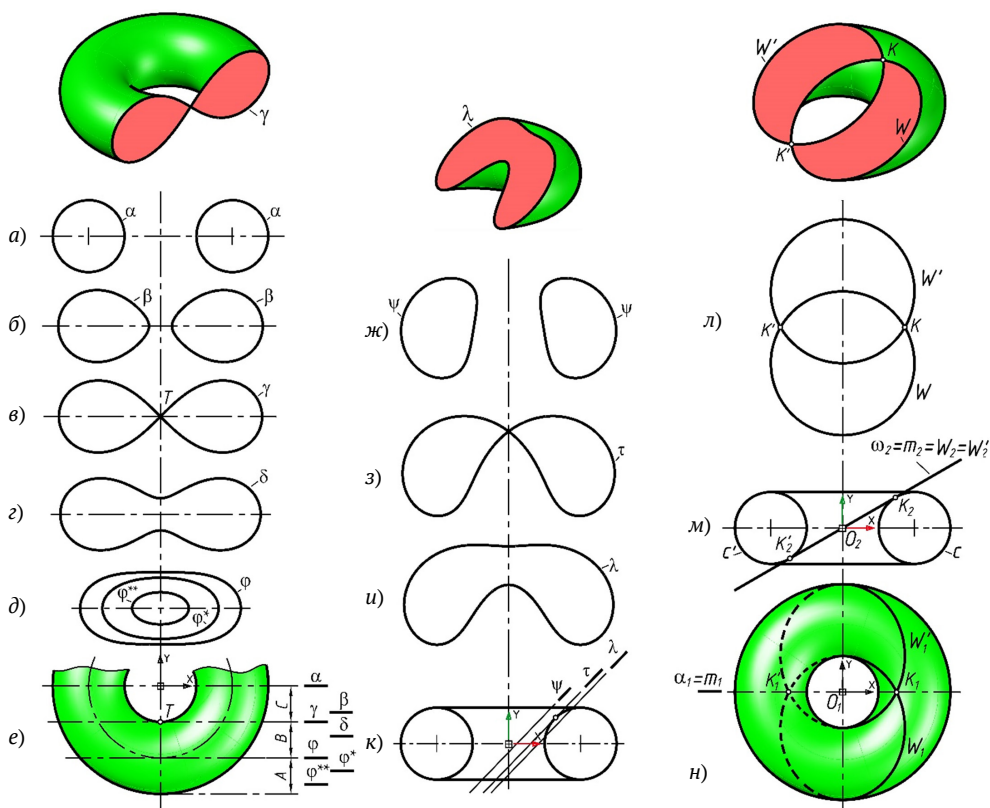


Рис. 11.14. Сечения тора:

а-е – кривые Персея; ж-к – спираческие кривые, л-н – круги Вилларсо

Кривые Персея

Если секущая плоскость параллельна оси тора, то линии сечения называются «кривые Персея». Внутри этого семейства линии дополнительно подразделяются в зависимости от положения секущей плоскости. Если плоскость находится внутри интервалов «А» или «С» (рис. 11.14е), линии называются «овалы Кас-

сини» (рис. 11.14б, д) в честь итальянского математика, астронома и инженера Джованни Кассини (1625–1712). В интервале «А» эти линии близки к эллипсу. Интересно, что Кассини ошибочно считал, что эти овалы определяют орбиту Земли.

В интервале «В» линии (рис. 11.14з) называют «лемниската Бута» в честь английского математика Джеймса Бута (1810–1878), который их изучал.

Плоскость γ , касательная к внутренней поверхности тора в одной его точке T (рис. 11.14е), образует в сечении линию, которую называют «лемниската Бернулли» (рис. 11.14в). Ее исследователь – швейцарский математик Якоб Бернулли (1654–1705) – дал этой кривой название «лемниската» – по-гречески «бантик».

Сечения наклонной плоскостью. Круги Вилларсо

Эти сечения имеют название, общее для всех сечений тора, – спирические кривые. Секущая плоскость пересекает ось тора под непрямым углом (рис. 11.14к). В сечениях образуются овалы (рис. 11.14ж) и лемнискаты (рис. 11.14з, и).

Частным случаем спирических кривых являются круги Вилларсо (рис. 11.14л–н). Эти сечения названы в честь французского астронома и математика Ивона Вилларсо (1813–1883), открывшего особые свойства этого сечения. Особенность заключается в том, что если секущая плоскость имеет две точки касания с внутренней поверхностью открытого тора, то в сечении образуются две окружности (рис. 11.14л). Примером дважды касательной плоскости является плоскость ω , касающаяся тора в точках K и K' (рис. 11.14м).

Построение кругов Вилларсо является интересной и сложной задачей на геометрически точные 3D-построения.

Алгоритмы построений сечений тора, включая лемнискату Бернулли и кругов Вилларсо, приведены в разделе 12.11.

- Лектору: откройте файл «Сечение тора .dwg» (см. раздел 12.11). Поясните построение 3D-сечений на примере лемнискаты Бернулли и кругов Вилларсо.

Вопросы для самоконтроля

1. Назвать типы геометрических объектов в AutoCAD'е. Их назначение и особенности.
2. Что такое тела Платона? Назвать их.
3. Дать определение многогранника и его элементов. Определение пирамиды, призмы, параллелепипеда.
4. Как построить 3D-правильную и неправильную пирамиду? Как построить прямую или наклонную, правильную или неправильную призму?
5. Построение точки на поверхности произвольного геометрического тела, если задана одна из проекций этой точки.
6. Как построить точки пересечения прямой линии с произвольным геометрическим телом?

7. Построить чертеж треугольной пирамиды и задать точку на ее поверхности.
8. Что является сечением многогранника? 3D-модель сечения многогранника и построение истинного вида этого сечения.
9. Дать определение конуса и его вариантов. Построить 3D-модель различных вариантов конуса.
10. Построить чертеж конуса и точку на его поверхности.
11. Конические сечения. Их образование и классификация в зависимости от положения секущей плоскости.
12. Уметь построить эллипс, гиперболу и параболу как 3D-модели конических сечения. Построение истинного вида конических сечений.
13. Определение эллипса. Построение эллипса как конического сечения и его истинного вида. Оси эллипса. Построение точек фокуса. Теорема Данделена.
14. Теорема Паскаля о кониках. Построить шестиугольник Паскаля для эллипса.
15. Построение гиперболы и ее асимптот как конических сечений. Построение параболы как конического сечения.
16. Определение цилиндра. Варианты цилиндра. Построение прямого и наклонного цилиндра. Сечения цилиндра.
17. Сфера, ее определение и построение. Сечения сферы. Проекции сечения сферы. Построить сферу и ее сечение наклонной плоскостью. Построить истинный вид сечения и показать, что это окружность.
18. Как построить сферу по четырем точкам.
19. Тор, его определение, термины и варианты тора. Построение 3D-модели открытого и самопересекающегося тора.
20. Алгоритм 3D-построения точек на поверхности тора, если для точки задана одна проекция. Построение точек пересечения отрезка прямой с поверхностью тора.
21. Сечения тора плоскостью. Кривые Персея. Построить лемнискату Бернулли.
22. Спирические кривые как сечения тора. Круги Вилларсо. Построить круги.

глава 12

Приложение к лекции 6: Геометрические тела

12.1. 3D-модели тел Платона

Известны алгоритмы создания моделей тел Платона на основе построения развертки. На листе вычерчивают грани, сопряженные по общим ребрам, и, многократно изгибая лист по ребрам, получают 3D-модель. В нашем алгоритме мы также начнем с построения развертки из двух-трех граней, затем выполним их поворот вокруг общих ребер и полученный 3D-модуль размножим круговым массивом.

12.1.1. Додекаэдр

Додекаэдр содержит 12 одинаковых граней, каждая из которых является правильным пятиугольником.

- ◆ Создайте файл на основе шаблона. Заморозьте слои с плоскостями. Перейдите в окно вида сверху. Установите МСК.
- ◆ Постройте правильный пятиугольник , назовем его гранью D , с центром в $0,0$, вписанный в окружность $R30$ (рис. 12.1а), – это будет основание додекаэдра.
- ◆ Постройте еще два правильных пятиугольника: грани F , G . Для этого в команде «Многоугольник» примените опцию «Ребро» и совместите грани F , G ребрами с гранью D – это контуры боковых граней.

Грань F необходимо повернуть вокруг ребра $(2, 3)$ (рис. 12.1б). Грань G – повернуть вокруг ребра $(2, 3')$. Угол поворота каждой грани определяется точкой K , в которой пересекаются траектории точек $1, 1'$. Построим окружность m как траекторию точки 1 :

- ◆  – построьте перпендикуляр $(1, 4)$ на продолжение ребра $(2, 3)$;
- ◆ ПСК, Направление оси Z  \ Начало: точка 4 \ Точка на положительном луче X : точка 3 ;
- ◆ Окружность  \ Центр: $0,0$ \ Радиус: укажите точку 1 – построена окружность m ;

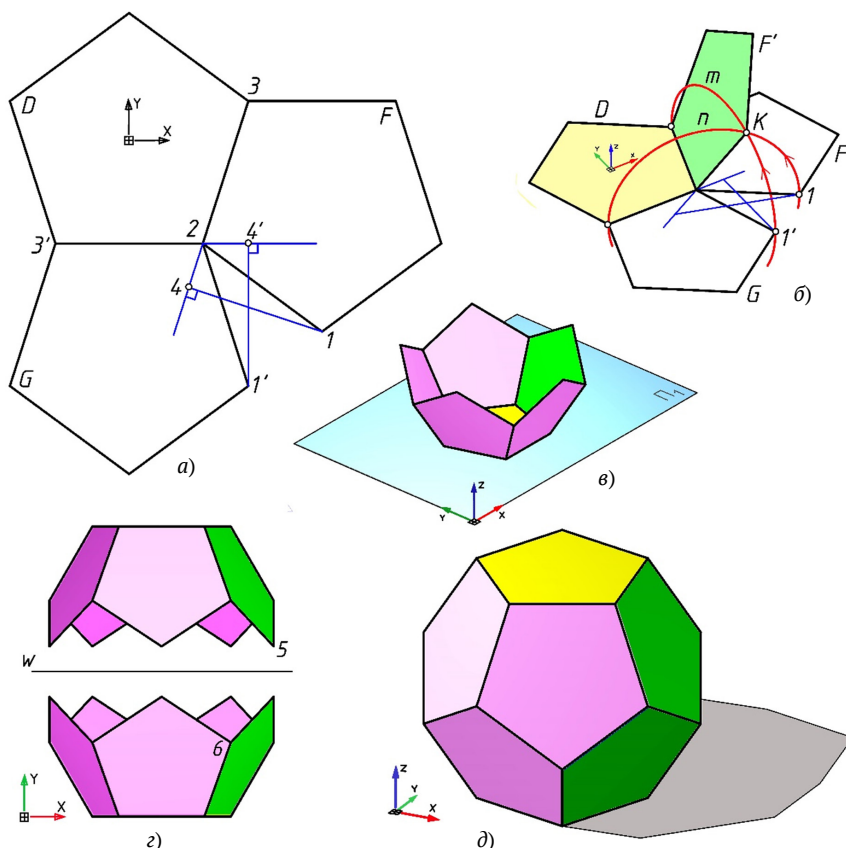


Рис. 12.1. Построение додекаэдра:
 а – разметка; б – вращение грани; в – массив нижних граней;
 г – верхние грани; д – законченная модель

- ◆ повторите построение для пятиугольника G и постройте окружность n как траекторию точки $1'$;
- ◆ на пересечении окружностей m, n поставьте маркер точки K .

Повернем грань F в рабочее положение (см. рис. 12.1б):

- ◆ установите ПСК, направив ось Z от точки 4 к точке 2 (или 3);
- ◆ Главная \ Редактирование \ Поворот \ Выберите объекты: укажите контур грани F \ Базовая точка: 0,0 \ Опорный угол \ Задайте опорный угол: 0,0 \ Вторая точка: укажите точку 1 \ Новый угол: укажите точку K – грань приняла положение F' .

Создадим круговой массив граней F' (рис. 12.1в):

- ◆ верните МСК ;
- ◆ Главная \ Редактирование \ Круговой массив \ укажите грань F' \ Задайте центральную точку массива: 0,0 \ Элементы \ Число элементов в массиве: 5 – построен нижний ряд боковых граней тетраэдра.

Установите вид спереди и зеркально отобразите нижний ряд вместе с основанием (рис. 12.1з):

- ◆ Вид \ Ортогональные виды \ Вид спереди;
- ◆ в режиме «ОРТО» постройте горизонтальный отрезок  оси зеркала w ;
- ◆ Главная \ Редактирование \ Зеркало  \ рамкой выберите грани нижнего ряда и основание \ укажите две точки отрезка оси зеркала w \ удалить объекты: Нет – построен верхний пояс граней;
- ◆ верните МСК;
- ◆ поверните  верхние грани и верхнее основание вокруг точки $O,0$ на 36° ;
- ◆ переместите верхние грани вместе с основанием вниз, совместив вершину выступов этих граней, точку 5 с точкой 6 нижних граней, расположенной напротив точки 5, – модель додекаэдра построена (рис. 12.1д).

Придайте модели наглядность:

- ◆ командой «Разбивка»  выделите грани из круговых массивов. Придайте граням цвет, настройте источники света;
- ◆ постройте падающую тень на плоскость Π_1 (см. раздел 5.4.3).

Построенная модель состоит из плоских граней, каждая из которых является объектом «Область». Грани можно объединить в блок или создать на их основе солид-объект. Для создания солида следует поместить модель из граней внутрь солид-сферы и 12 раз применить команду «Разрез». Секущие плоскости задавать указанием граней.

Приведенный выше алгоритм додекаэдра может быть применен для построения всех тел Платона.

- ◆ Сохраните модель в файле «Додекаэдр.dwg».

12.1.2. Икосаэдр

Построение икосаэдра – это наиболее сложный пример построения тел Платона. Икосаэдр составлен из двадцати равносторонних треугольников.

- ◆ Создайте новый файл на основе шаблона. Перейдите в окно вида сверху, МСК;
- ◆ постройте правильный пятиугольник  D с центром в $O,0$, вписанный в окружность $R30$ (рис. 12.2а);
- ◆ постройте правильный треугольник F . Для этого в команде «Многоугольник» примените опцию «Ребро» и в точках 2, 3 совместите вершины ребер треугольников D и F ;
- ◆ постройте отрезок k ($O, 2$) и удлините его на 30 мм;
- ◆ Поворот  \ Выберите объекты: укажите контур F \ Базовая точка: укажите точку 2 \ Копировать \ Опорный угол \ Задайте опорный угол: точка 2 \ Вторая точка: с привязкой «Середина» укажите точку 4 \ Новый угол: укажите конечную точку отрезка k – построен треугольник G ;

- ◆ Поворот  \ укажите отрезок k \ Базовая точка: укажите точку 2 \ Копировать \ угол поворота: 90° – построен отрезок $v \perp k$;
- ◆ из точки 5 опустите перпендикуляр на отрезок v – найдена точка 6.

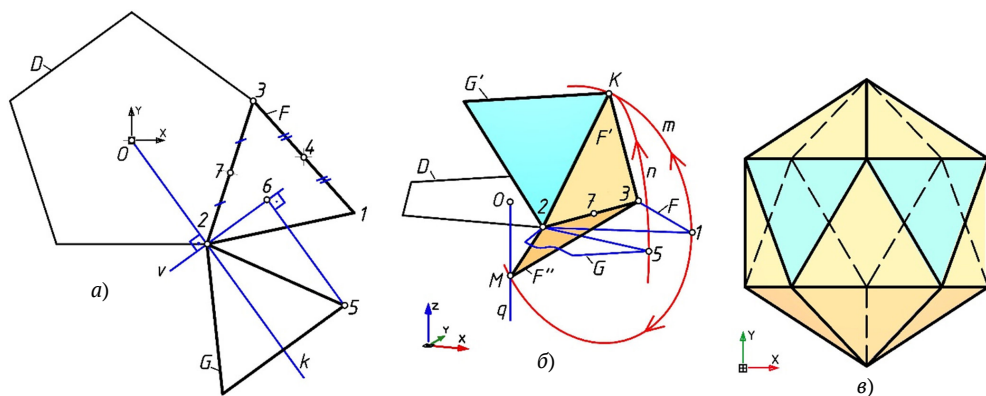


Рис. 12.2. Построение икосаэдра:
а – разметка; б – вращение граней; в – законченная модель

Поворачиваем треугольники F , G в «рабочее положение» граней икосаэдра (рис. 12.2б):

- ◆ в МСК, в режиме «ОПТО» постройте  вертикальный отрезок q из центра треугольника D вдоль оси Z длиной 30;
- ◆ ПСК, Направление оси Z  \ Начало: точка 7 \ Точка на положительном луче X : точка 3;
- ◆ Окружность  \ Центр: 0,0 \ Радиус: укажите точку 1 – построена окружность m ;
- ◆ ПСК, Направление оси Z  \ Начало: точка 6 \ Точка на положительном луче X : точка 2;
- ◆ Окружность  \ Центр: 0,0 \ Радиус: укажите точку 5 – построена окружность n ;
- ◆ на пересечении окружностей m , n поставьте маркер точки K (если пересечение не выявлено, ищите ошибку построения);
- ◆ на пересечении отрезка q с окружностью m поставьте маркер точки M ;
- ◆ ПСК, Направление оси Z  \ Начало: точка 7 \ Точка на положительном луче X : точка 3;
- ◆ Поверните треугольник F вокруг оси $(7, 3)$ до совмещения вершины 1 с точкой K – построена грань F' ;
- ◆ поверните тот же треугольник F вокруг оси $(7, 3)$ в обратную сторону до совмещения вершины 1 с точкой M – построена грань F'' ;
- ◆ ПСК, Направление оси Z  \ Начало: точка 6 \ Точка на положительном луче X : точка 2;

- ◆ поверните грань G вокруг оси (6, 2) до совмещения вершины 5 с точкой K – построена грань G' ;
- ◆ преобразуйте треугольники граней в объекты «Область».

Построен модуль из трех треугольных граней F' , G' , F'' . Создадим круговой массив этого модуля:

- ◆ восстановите МСК;
- ◆ Круговой массив  \ укажите три грани модуля \ Задайте центральную точку массива: 0,0 \ Элементы \ Число элементов в массиве: 5 – построен средний и нижний ряд граней (рис. 12.2в);
- ◆ командой «Разбивка»  выделите грани из кругового массива.

Завершение модели. Осталось добавить верхний ряд граней. Для этого зеркально отобразим и повернем нижний ряд граней:

- ◆ Вид \ Ортогональные виды \ Вид спереди;
- ◆ Отрезок  \ укажите среднюю точку какого-либо бокового ребра среднего ряда \ в режиме «ОРТО» постройте горизонтальный отрезок – это ось зеркала;
- ◆ Зеркало  \ рамкой выберите грани нижнего ряда \ укажите две точки отрезка оси зеркала \ удалить объекты: Нет – построено предварительное положение верхних граней;
- ◆ восстановите МСК;
- ◆ поверните  верхние грани вокруг точки 0,0 на 36° – модель построена (см. рис. 12.2в);
- ◆ сохраните модель в файле «Икосаэдр.dwg».

12.1.3. Модель «Икосаэдр вписан в додекаэдр»

Возможность построения модели определяется особой формой тел Платона, в частности тем, что додекаэдр состоит из 20 граней, а икосаэдр имеет 20 вершин. Каждая вершина икосаэдра должна касаться грани додекаэдра. Существование такой модели и подобных ей отображает одно из многих замечательных свойств тел Платона.

Для того чтобы вписать икосаэдр в додекаэдр, достаточно совместить три вершины икосаэдра с центрами трех граней додекаэдра. Поэтому постановка задачи:

имеются 3D-модели додекаэдра (см. раздел 12.1.1) и икосаэдра (см. раздел 12.1.2). Требуется совместить три вершины икосаэдра с центрами трех граней додекаэдра.

Модели могут находиться в разных файлах или в одном. Алгоритм построений следующий.

1. В трех рядом расположенных гранях додекаэдра определите точки 1, 2, 3 центра граней (см. рис. 11.3а). Это точки пересечения двух высот (медиан или биссектрис) в этих гранях. В Платформе nanoCAD эти точки можно определить применением объектной привязки. Например:

- ◆ выберите грань додекаэдра и изолируйте ее от остальных объектов;
 - ◆ Точка  \ с объектной привязкой «Центр масс» укажите грань – в центр грани поставлен маркер точки;
 - ◆ завершите изоляцию грани;
 - ◆ повторите определение центров масс для двух других граней додекаэдра (см. рис. 11.3а).
2. Всем граням додекаэдра через панель «Свойства» присвойте прозрачность 50.
 3. В модели икосаэдра установите ПСК по трем рядом расположенным вершинам 4, 5, 6 (см. рис. 11.3б).
 4. Скопируйте икосаэдр в буфер обмена с базовой точкой 4.
 5. В додекаэдре установите ПСК по трем точкам 1, 2, 3, ранее помеченным маркерами.
 6. Из буфера обмена вставьте икосаэдр как блок с точкой вставки 1.

Икосаэдр виден внутри додекаэдра, при этом точки 1 и 4 совпали. Для совмещения остальных вершин необходимо выполнить масштабирование икосаэдра относительно точки (1, 4) так, чтобы точка 5 совпала с точкой 2:

- ◆ Масштаб  \ Выбор объектов: укажите икосаэдр \ Базовая точка: укажите совмещенную точку (1, 4) \ Опорный отрезок \ Укажите длину: укажите точку (1, 4) \ Вторая точка: укажите точку 5 \ Задайте новую длину: укажите точку 2.

У моделей попарно совпали три выбранные вершины. При этом все остальные вершины икосаэдра оказались в центрах граней додекаэдра. То есть икосаэдр вписан в додекаэдр.

Модель построена. Осталось придать ей наглядность корректировкой прозрачности граней, цвета и источников света.

- ◆ Сохраните модель в файле «Додекаэдр и Икосаэдр.dwg».

12.2. Алгоритмы 3D- и 2D-построений пирамиды и призмы

Рассмотрим построение 3D-моделей и чертежей многогранников.

12.2.1. 3D-модель пирамиды к рис. 11.4а

Координаты вершин четырехугольника основания в МСК: (21, 30)(42, 58)(81, 43)(58, 17). Вершина пирамиды $S(57, 37, 53.5)$. Точка D_2 на Π_2 (67.3, 70, 13.7). Точка $B_1(44, 28, 0)$.

- ◆ Создайте файл на основе шаблона, МСК, визуальный стиль «Концептуальный»;
- ◆ командой «Полилиния»  или «3D-полилиния»  постройте замкнутый многоугольник основания по приведенным выше координатам;

- ◆ установите маркер точки в точку S вершины пирамиды;
- ◆ скопируйте многоугольник основания; базовая точка – произвольная вершина многоугольника основания; вторая точка – маркер точки S .

Далее возможны два варианта построений (см. раздел 11.2.2). Первый вариант:

- ◆ выполните масштабирование  скопированного многоугольника относительно точки S с коэффициентом масштабирования 0.001 – полученный многоугольник будет вторым сечением для команды «Вытягивание по сечениям»;
- ◆ Вытягивание по сечениям  \ Выберите поперечные сечения: укажите основание \ увеличив изображение, укажите второе сечение \ Только поперечные сечения – пирамида построена.

Второй вариант:

- ◆ командой «Вытягивание по сечениям»  создайте призму, указав построенные многоугольники как сечения;
- ◆ Разрез  \ Укажите призму \ Три точки \ укажите маркер вершины и конечные точки одного из ребер основания пирамиды \ Обе – призма разрезана;
- ◆ удалите отсеченную часть призмы;
- ◆ повторите команду «Разрез» для оставшихся ребер основания – пирамида построена.

Определение точек D, D' :

- ◆ включите режим «ОПТО», МСК;
- ◆ Отрезок  \ введите координаты точки D_2 \ переместите курсор вдоль оси Y \ введите 70 – построен отрезок m ;
- ◆ Сечение  \ укажите пирамиду \ 3 точки \ укажите конечные точки отрезка m и вершину S – построено сечение как область, содержащая отрезки $(S, 1)$ и $(S, 1')$;
- ◆ Разбивка  \ укажите область сечения – из области выделены отрезки $(S, 1)$ и $(S, 1')$;
- ◆ с объектной привязкой «Пересечение» поставьте  маркеры искомых точек D, D' на пересечении отрезков $(S, 1)$, $(S, 1')$ с отрезком m .

Определение точки B :

- ◆ Отрезок  \ введите координаты точки B_1 (см. выше) \ переместите курсор вдоль оси Z \ введите 70 – построен отрезок n ;
- ◆ Сечение  \ укажите пирамиду \ 3 точки \ укажите конечные точки отрезка n и вершину S – построено сечение как область, содержащая отрезок $(S, 2)$;
- ◆ Разбивка  \ укажите область сечения – из области выделены отрезок $(S, 1)$;
- ◆ с объектной привязкой «Пересечение» поставьте  маркер искомой точки $B = (S, 1) \cap n$.

12.2.2. Чертеж многогранника (пирамиды) к рис. 11.46

Ребра и вершины многогранника называют *сеткой многогранника*. Чертеж многогранника образован проекциями его сетки, т. е. проекциями ребер и вершин, показанных с учетом их видимости. Примером является чертеж пирамиды (см. рис. 11.46). Для его построения следует по параметрам 3D-модели вычертить проекции многоугольника основания, точки проекции вершины пирамиды и завершить проекциями боковых ребер, соединив проекции вершин основания с проекциями вершины пирамиды. Рекомендуется построение проекций как 2D-видов (см. раздел 5.2.4).

Основной операцией при работе с чертежом многогранника или любого тела является построение точек на его поверхности. Алгоритмы решения этой задачи являются составной частью алгоритмов многих задач. Рассмотрим ее решение, выполняемое на чертеже пирамиды.

Задача. *Заданы фронтальные проекции двух фронтально конкурирующих точек $D_2 = D'_2$. Построить горизонтальные проекции этих точек, если точки принадлежат поверхности пирамиды.*

Поверхность пирамиды (и любого многогранника) – это набор граней – плоскостей, поэтому задача сводится к построению точки на плоскости (см. раздел 3.5.3).

Точка принадлежит поверхности (плоскости), если она принадлежит какой-либо линии этой поверхности. Пусть точки D принадлежат прямым, проведенным параллельно основанию пирамиды (см. рис. 11.46). Построим горизонтальные проекции этих прямых. Для этого найдем вспомогательную точку $З_2$ на ребре пирамиды, построим горизонтальную проекцию точки $З$ – точку $З_1$ и проекции прямых, задав их параллельными ребрам основания. На этих проекциях по проекционной связи найдем искомые горизонтальные проекции точек D_1 и D'_1 .

Задача. *Для точки B , принадлежащей поверхности пирамиды, построить фронтальную проекцию B_2 , если задана горизонтальная проекция этой точки B_1 .*

Построим горизонтальную проекцию вспомогательной прямой, проходящей из вершины пирамиды S через точку B , т. е. прямую S_12_1 . Построим ее фронтальную проекцию S_22_2 . По проекционной связи находим искомую фронтальную проекцию точки B – точку B_2 .

◆ 3D-модель пирамиды и чертеж сохраните в файле «Пирамида и точка.dwg».

12.2.3. Модель и чертеж к рис. 11.5 (пересечение прямой с пирамидой)

Построение модели пирамиды (рис. 11.5a):

- ◆ создайте файл на основе шаблона, МСК;
- ◆ включите режим «ОРТО»;
- ◆ Пирамида  \ Стороны \ Число сторон: 5 \ Центр основания: 50,35,0 \ Вписанный \ Радиус основания: 32 \ Высота: 85 – пирамида построена.

В панели «Свойства» проверьте параметры созданной пирамиды и при необходимости отредактируйте их. Убедитесь, что пирамида «вписанная». На виде сверху убедитесь, что расположение ребер как на рис. 11.5, иначе поверните пирамиду вокруг вершины командой «Поворот» с опцией «Опорный угол».

Построение отрезка m :

- ◆ Отрезок  \ Первая точка: 16.5,48.2,12.5 \ Следующая точка: 75,12,45 \

Сечение плоскостью, проходящей через вершину пирамиды:

- ◆ Сечение  \ Укажите пирамиду \ 3 точки \ с привязкой «Конточка» укажите вершину пирамиды и конечные точки отрезка m – построены отрезки a , b .

Сечение фронтально проецирующей плоскостью:

- ◆ Отрезок \ Первая точка: укажите левую конечную точку отрезка m \ Следующая точка: в режиме «ОРТО» переместите курсор вдоль оси Y на 30 мм – построен вспомогательный отрезок фронтально проецирующей прямой;
- ◆ Сечение \ укажите пирамиду \ 3 точки \ укажите две точки отрезка m и точку вспомогательного отрезка – построен пятиугольник сечения;
- ◆ поставьте маркеры найденных точек A , B пересечения отрезка m с поверхностью пирамиды.

Построение проекционного чертежа (см. рис. 11.5б)

Требуется на проекционном чертеже найти точки A , B пересечения отрезка m с пирамидой. Проекции пирамиды и отрезка m построены по 3D-модели как 2D-виды (см. раздел 5.2.3).

Решение выполнено согласно алгоритму первой позиционной задачи о пересечении прямой линии с плоскостью (см. раздел 5.5). На чертеже секущая плоскость задана как фронтально проецирующая α , построенная через фронтальную проекцию прямой m_2 . Найдены точки 1–5 пересечения плоскости α с ребрами пирамиды. Построена горизонтальная проекция пятиугольника сечения. На пересечении его сторон с горизонтальной проекцией отрезка m_1 найдены горизонтальные проекции искомых точек A_1 , B_1 пересечения отрезка m с пирамидой. По проекционной связи на фронтальной проекции отрезка m_2 найдены фронтальные проекции искомых точек пересечения A_2 , B_2 .

Для наглядности решение, выполненное на чертеже, пояснено на 3D-модели (см. рис. 11.5а), на которой показан пятиугольник 1-5 сечения пирамиды плоскостью α .

- ◆ 3D-модель и чертеж сохраните в файле «Пересечение пирамиды с прямой.dwg».

12.2.4. 3D-модель и чертеж сечения пирамиды плоскостью (к рис. 11.6)

Построение 3D-модели. Координаты в МСК

Треугольник основания пирамиды: (3.4, 42.9)(29, 9.6)(53.9, 49.4). Вершина пирамиды (29, 34.2, 50.7). Отрезки a , b секущей плоскости: (57.6, 62.5, 31.4); общая точка (–1.85, 28.2, 50.71); (25.3, 13.6, –9.7).

- ◆ Создайте файл на основе шаблона. МСК.

Построение пирамиды (рис. 11.6а)

Создадим вспомогательную призму с основанием пирамиды и отсечем лишнюю часть:

- ◆ Полилиния  \ Введите координаты точек основания \ Замкнуть;
- ◆ поставьте маркер точки в вершину пирамиды;
- ◆ Выдавливание  \ Выберите объект для выдавливания: укажите треугольник основания \ Направление \ Определите начальную точку направления: укажите одну из вершин основания \ Определите конечную точку направления: укажите маркер точки вершины пирамиды – построена призма;
- ◆ Разрез  \ Укажите призму \ Три точки \ укажите маркер вершины пирамиды и конечные точки ребра основания, противоположного вершине, выбранной для выдавливания \ Обе – призма рассечена;
- ◆ удалите отсеченную часть призмы – осталась требуемая пирамида.

Построение сечения пирамиды:

- ◆ Отрезок  \ введите координаты трех точек отрезков a , b секущей плоскости;
- ◆ Сечение  \ Укажите пирамиду \ 3 точки \ с привязкой «Конточка» укажите конечные точки отрезков a , b – построено сечение как объект «Область»;
- ◆ Копирование \ укажите сечение \ в режиме «ОРТО» сместите сечение на 40 мм вдоль оси X .

Построение разреза пирамиды (рис. 11.6б):

- ◆ в новом видовом экране скройте сечения;
- ◆ Разрез  \ Укажите пирамиду \ Три точки \ укажите конечные точки отрезков a , b \ Обе – пирамида рассечена;
- ◆ верхнюю часть пирамиды в режиме «ОРТО» переместите вдоль оси X на 40 мм;
- ◆ в МСК на виде сверху поверните отделенную часть пирамиды на -90° .

Построение истинного вида сечения (рис. 11.6в):

- ◆ в новом видовом экране оставьте отрезки секущей плоскости и построенное сечение. Остальные объекты переместите на замороженные слои или изолируйте-скройте;
- ◆ установите ПСК по трем точкам плоскости сечения;
- ◆ с командной строки введите команду «План» с опцией «Текущая ПСК» – сечение построено в истинном виде.

Придайте модели наглядность, задав цвет граням пирамиды и сечениям. Настройте источники света.

Решение на проекционном чертеже

Задача. Постройте сечение треугольной пирамиды плоскостью Σ ($a \cap b$). Определите истинный вид сечения.

Построим проекции пирамиды и отрезков a , b (рис. 12.3а). Построения выполним по приведенным выше координатам этой модели. Рационально построить проекции по предварительно созданной 3D-модели как 2D-виды (см. раздел 5.2.3).

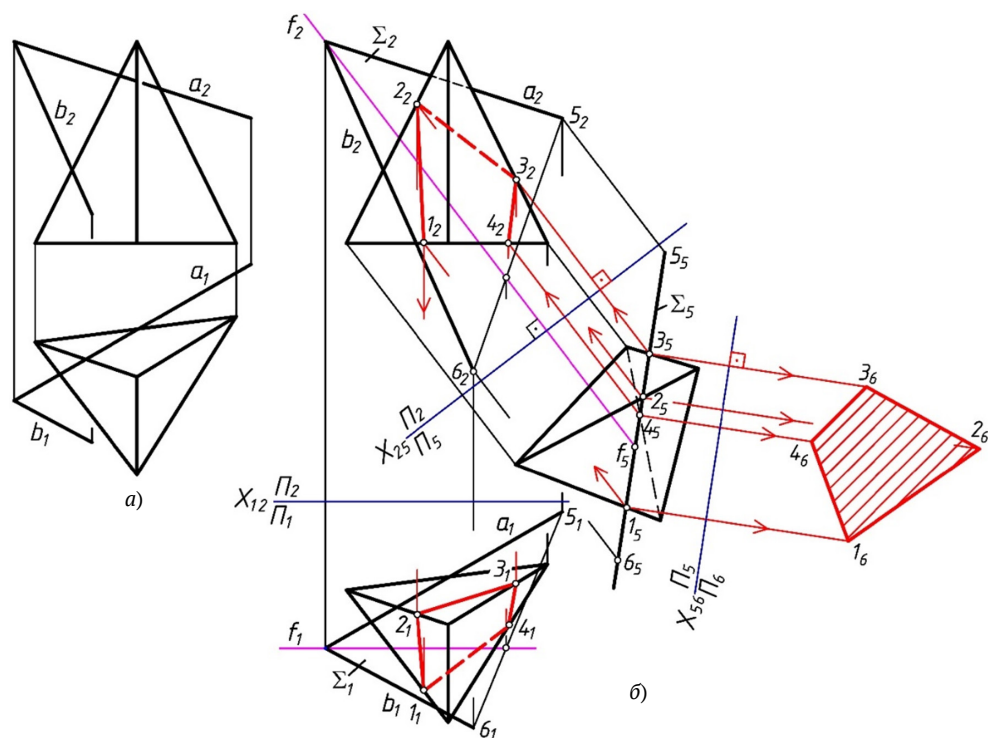


Рис. 12.3. Сечение пирамиды плоскостью: а – дано; б – чертеж

Алгоритм решения следующий (рис. 12.3б). В плоскости Σ ($a \cap b$) построим фронталь f . Введем дополнительную плоскость $\Pi_5 \perp f$. По точкам 5, 6 построим проекцию плоскости Σ_5 , которая стала проецирующей. На пересечении Σ_5 с проекциями ребер пирамиды найдем точки 1_5-4_5 их пересечения с плоскостью Σ . Обратными построениями получим искомые проекции сечения на Π_2 и Π_1 . Получены проекции четырехугольника сечения. Первая часть задачи решена.

Для построения истинного вида сечения введем дополнительную плоскость $\Pi_6 \parallel \Sigma$. Найдем проекции точек сечения 1_6-4_6 , являющиеся вершинами искомого четырехугольника истинного вида сечения. Задача решена.

Сравните фигуру сечения, построенную на чертеже, с фигурой, построенной по 3D-модели (см. рис. 11.6в). Нумерация точек сечения на обоих изображениях единая. Если чертеж был выполнен точно, то при наложении и, возможно, дополнительном масштабировании и повороте фигуры сечения совпадают.

◆ Сохраните 3D-модели и чертеж в файле «Сечение пирамиды плоскостью.dwg».

12.2.5. 3D-модель и чертеж призмы (к рис. 11.7)

Построить призму, точку на ее поверхности, пересечение с прямой линией, сечение плоскостью.

Построение 3D-модели

Координаты модели в МСК (см. рис. 11.7а): четырехугольник основания пирамиды: ((20.3, 34.4)(31.4, 2.8)(51.5, 14)(46.4, 61.8)); отрезок b ((51.5, 14,0)(81.8, 18.4, 60.5)); точка K_2 (43.0, 70.0, 34.5); отрезок m ((16.9, 30.1, 14.2)(84.5, 8.0, 45.1)).

- ◆ Создайте файл на основе шаблона. МСК.

Построение призмы (см. рис. 11.7б):

- ◆ Полилиния  \ введите координаты четырехугольника основания \ Замкнуть – построен четырехугольник основания;
- ◆ Отрезок  \ Первая точка: 51.5,14,0 \ Следующая точка: 81.8,18.4,60.5 – построен отрезок b ребра призмы;
- ◆ Выдавливание  \ Выберите объект для выдавливания: укажите четырехугольник основания \ Траектория \ Укажите отрезок b – построена призма.

Точки пересечения призмы с отрезком m :

- ◆ Отрезок  \ введите координаты точек отрезка m (см. выше);
- ◆ Сечение  \ укажите призму \ 3 точки \ с привязкой «Конточка» укажите конечные точки отрезка m и вершину C' верхнего основания призмы – построен четырехугольник сечения как объект «Область»;
- ◆ Копирование  \ укажите сечение \ в режиме «ОРТО» сместите сечение на 70 мм вдоль оси X – построено вынесенное сечение призмы;
- ◆ Разбивка  \ укажите первоначальное сечение – из области выделены отрезки (1, 2) и (2, 3);
- ◆ Точка  \ с привязкой «Пересечение» поставьте маркеры точек в пересечение отрезка m с отрезками (1, 2) и (2, 3) – получены искомые точки M, N пересечения прямой с призмой.

Определение точек K, K' :

- ◆ включите режим «ОРТО»; МСК;
- ◆ Точка  \ по приведенным выше координатам поставьте маркер точки K_2 ;
- ◆ Отрезок  \ укажите маркер точки K_2 \ переместите курсор вдоль оси Y \ введите 70 – построен отрезок $n \perp \Pi_2$;
- ◆ ПСК, Начало \ Укажите начало ПСК: укажите маркер точки K_2 ;
- ◆ Сечение  \ укажите призму \ 3 точки \ Первая точка на секущей плоскости: 0,0;
- ◆ Вторая точка на плоскости: 1,0 \ Третья точка на плоскости: 0,1 – построено горизонтальное сечение призмы через точку K_2 и отрезок n ;
- ◆ Разбивка  \ укажите область горизонтального сечения – из области выделены отрезки (4, 5) и (5, 6);

- ◆ на пересечении отрезков (4, 5) и (5, 6) с отрезком m , с объектной привязкой «Пересечение», поставьте  маркеры искомых точек K, K' .

Построение проекционного чертежа (см. рис. 11.7в)

Требуется построить чертеж призмы, на поверхности призмы найти точки K, K' , для которых задана фронтальная проекция K_2 , построить точки M, N пересечения отрезка m с призмой.

Проекции пирамиды и отрезка m построены по 3D-модели как 2D-виды (см. раздел 5.2.3). Можно их построить и вручную по приведенным выше координатам этой модели. Для этого контур нижнего основания скопируйте в точку B' верхнего основания, и одноименные точки основания соедините параллельными отрезками проекций боковых ребер.

Горизонтальные проекции точек K определены по алгоритму принадлежности точки плоскости (см. раздел 3.5.3). Для этого в плоскостях граней призмы построены отрезки (4, 5) и (5, 6), содержащие точку K и параллельные ребрам основания.

Точки пересечения прямой с призмой определены по алгоритму первой позиционной задачи (см. раздел 5.5). Через фронтальную проекцию прямой m_2 задана фронтально проецирующая секущая плоскость Σ . Найдены точки 7, 8, 9 пересечения плоскости Σ с ребрами призмы. На пересечении отрезков $(7_1, 8_1)$ и $(8_1, 9_1)$ с горизонтальной проекцией отрезка m_1 найдены горизонтальные проекции искомых точек M_1, N_1 . По проекционной связи найдены фронтальные проекции искомых точек M_2, N_2 пересечения отрезка m с призмой.

- ◆ 3D-модель и чертеж сохраните в файле «Призма наклонная .dwg».

12.2.6. Параллелепипед по трем скрещивающимся прямым

Прежде чем приступить к решению задачи, выполните несложный эксперимент. Постройте произвольный параллелепипед, выберите три ребра, являющихся отрезками скрещивающихся прямых, и удлините отрезки, каждый в обе стороны. Параллелепипед удалите. Получены три отрезка скрещивающихся прямых. Возможно ли обратное действие, т. е. по произвольно заданным трем скрещивающимся прямым построить параллелепипед?

Задача: даны три скрещивающихся прямые a, b, c . Постройте параллелепипед, ребра которого принадлежат этим прямым (рис. 12.4а).

Исследование задачи. Из заданных прямых можно сформировать три пары: $(a, b), (a, c), (b, c)$. Выберем, например, пару (b, c) (рис. 12.4б). Если копированием отрезков создать плоскости $\alpha (b \cap c')$ и $\beta (b' \cap c)$, где $c' \parallel c$ и $b' \parallel b$, то эти плоскости будут содержать одну из заданных прямых и будут взаимно параллельны. Поэтому они могут быть приняты за плоскости граней параллелепипеда.

Если повторить построения для оставшихся пар прямых $(a, b), (a, c)$, получим шесть плоскостей, которые могут образовать параллелепипед. При взаимном пересечении этих плоскостей линии пересечения образуют параллелограммы, ограничивающие замкнутое пространство, т. е. образуется параллелепипед. Приходим к выводу, что задача имеет решение, причем единственное.

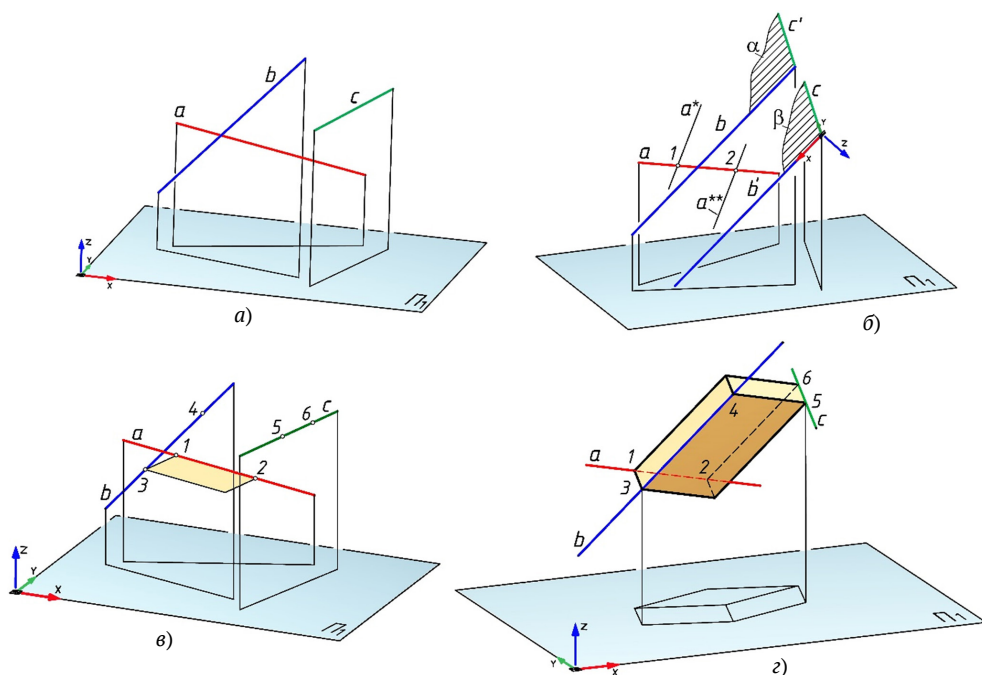


Рис. 12.4. Построение параллелепипеда по трем скрещивающимся прямым:
 a – дано; b – построение вершин; c – построение грани;
 z – построенный параллелепипед

Построение 3D-модели (рис. 12.4)

Координаты отрезков в МСК: $a((17.5, 35.6, 36.4)(67.9, 55.0, 20.9))$; $b((13.9, 31.5, 16.7)(58.6, 19.5, 64.8))$; $c((63.8, 12.3, 46.1)(75.4, 54.3, 47.4))$.

- ◆ Создайте новый файл на основе шаблона. По приведенным координатам постройте отрезки a , b , c (см. рис. 12.4а).

Из прямых b , c построим плоскости α , β и на прямой a найдем точки $1 = a \cap \alpha$ и $2 = a \cap \beta$ (см. рис. 12.4б):

- ◆ скопируйте отрезок c , совместив его конечную точку с конечной точкой отрезка b , – построен отрезок c' и образована плоскость α ($b \cap c'$);
- ◆ скопируйте отрезок b , совместив его конечную точку с конечной точкой отрезка c , – построен отрезок b' и образована плоскость β ($b' \cap c$);
- ◆ установите ПСК в плоскость α , командой «Конвертирование в 2D» постройте проекцию отрезка a на плоскость ПСК (отрезок a^*) и в пересечении прямой со своей проекцией поставьте маркер точки $1 = a \cap a^*$;
- ◆ установите ПСК в плоскость β , постройте проекцию отрезка a (отрезок a^{**}) и найдите точку $2 = a \cap a^{**}$;
- ◆ повторите построения для прямых (a, c) и найдите точки 3, 4 на прямой b (см. рис. 12.4в);
- ◆ повторите построения для прямых (a, b) и найдите точки 5, 6 на прямой c .

На заданных прямых найдены по две точки, всего шесть, каждая из которых является вершиной искомого параллелепипеда. Для решения задачи достаточно построения четырех точек. Три из них определяют одну из граней как из параллелепипеда. Четвертая точка определяет положение противоположной грани. Оставшиеся две точки контролируют правильность построения.

Чтобы построить грань, выбираем отрезок одного из ребер, из вершины отрезка проводим отрезок к другому ребру по направлению, параллельному третьему ребру. Этот алгоритм пояснен на рис. 12.4в. Выбран отрезок (1, 2) ребра a . Из точки 1 построен отрезок (1, 3) к ребру b по направлению, параллельному ребру c . По отрезкам (1, 2) и (1, 3) построен параллелограмм одной из граней.

Для завершения модели необходимо выдавить найденную грань по траектории, определяемой отрезком ребра, примыкающего к вершине этой грани. В рассматриваемом примере (рис. 12.4в) грань (1, 2, 3) выдавлена применением команды «Выдавливание» по траектории отрезка (3, 4). Получен параллелепипед (рис. 12.4з), ребрами которого являются отрезки, расположенные на заданных скрещивающихся прямых. Задача решена.

Для проверки решения:

- ◆ убедитесь, что три ребра параллелепипеда расположены на заданных прямых;
- ◆ постройте диагонали, минимум две, например отрезки (1, 5) и (3, 6), и с объектной привязкой «Пересечение» проверьте, что они пересекаются;
- ◆ выберите произвольную грань и убедитесь, что ее противоположные стороны взаимно равны по длине, т. е. контур грани является параллелограммом.

Придайте модели наглядность, задав объектам цвет и настроив источники света.

Построение проекционного чертежа (рис. 12.5)

Построение чертежа на рис. 12.5 выполнено для прямых, положение которых приведено на рис. 12.5а. С целью улучшения наглядности чертежа положение прямых относительно 3D-модели (см. рис. 12.4) скорректировано. В итоге на чертеже построен тот же параллелепипед, но в ином пространственном положении.

На чертеже приведено построение четырех вершин параллелепипеда. Алгоритм построений тот же, что для 3D-модели. Ввиду сложности построений чертеж выполнен в трех частях.

На рис. 12.5б показано построение верши 1 и 2. Для этого копированием отрезков (b , c) созданы плоскости α и β . По алгоритму первой позиционной задачи найдены точки 1, 2 пересечения прямой a с этими плоскостями.

На рис. 12.5в показано построение вершин 3, 4 как результат пересечения прямой b с плоскостями γ и δ , которые созданы копированием прямых (c , d). На этот рисунок перенесены точки 1, 2. По четырем точкам, согласно приведенному выше алгоритму, выполнено построение проекций искомого параллелепипеда.

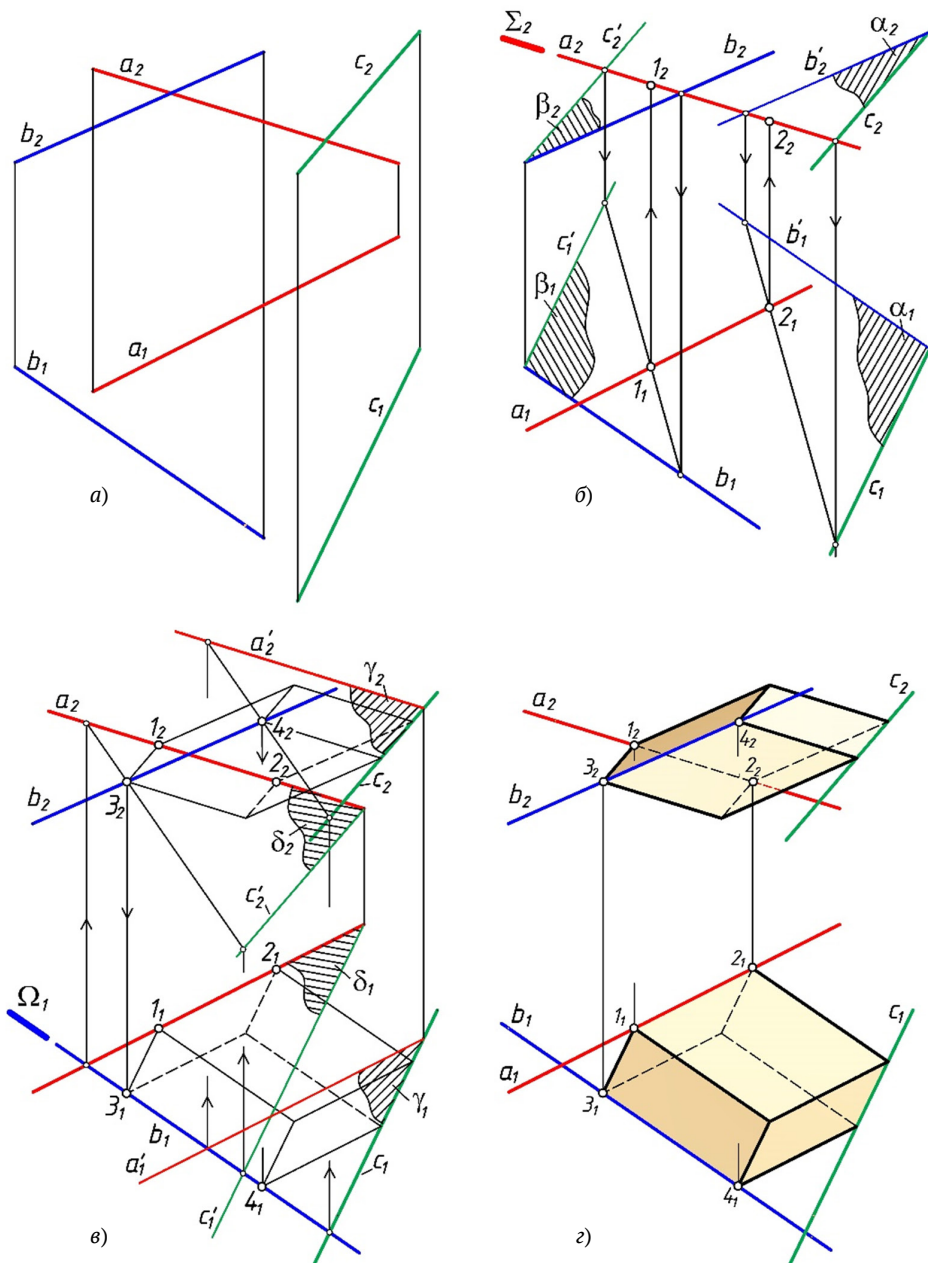


Рис.12.5. Построение параллелепипеда по трем скрещивающимся прямым. Чертеж: а – дано; б – построение вершин 1, 2; в – построение вершин 3, 4; г – параллелепипед

Для придания чертежу наглядности на рис. 12.5г проекции параллелепипеда дополнительно затонированы.

◆ 3D-модель и чертеж сохраните в файле «Параллелепипед .dwg».

12.3. 3D-модель и чертеж конуса

Конус – геометрическое тело, ограниченное конической поверхностью и плоскостью – основанием конуса. Рассмотрим построение 3D-моделей и чертежей этих объектов, сами модели приведены в разделе 11.3.

12.3.1. Модель конической и цилиндрической поверхностей (к рис. 11.8)

Коническую поверхность строим командой «Вытягивание по сечениям». Для этого необходимо построить два сечения: нижнее и верхнее. Нижнее – направляющая линия m . Верхним сечением конической поверхности должна быть точка – вершина поверхности. Поскольку вытягивание в точку командой не предусмотрено, построим усеченную коническую поверхность, в которой верхнее сечение – линия m' , являющаяся уменьшенной копией направляющей (см. рис. 11.8a):

- ◆ создайте файл на основе шаблона. МСК;
- ◆ в плоскости Π_1 постройте сплайн или полилинию произвольной формы – это направляющая конической поверхности и первое сечение команды;
- ◆ в плоскости Π_1 поставьте маркер точки S_1 и в режиме «ОРТО» переместите его вертикально вверх на 40...50 мм – построен маркер вершины поверхности S .

Строим второе сечение:

- ◆ двумя отрезками соедините вершину S с конечными точками 1, 2 направляющей линии m – построены отрезки $(S, 1)$ и $(S, 2)$;
- ◆ постройте отрезок $(1, 2)$, скопируйте его из точки 1 в точку 3, которую задайте на отрезке $(S, 1)$. На рис. 11.8a с целью наглядности построенный отрезок 3 показан на значительном расстоянии от вершины. Это приводит к построению усеченной поверхности с верхним основанием. В модели точку 3 следует задать как можно ближе к вершине S . Это приблизит модель к полной поверхности;
- ◆ скопируйте направляющую m вместе с отрезком $(1, 2)$ из точки 1 в точку 3 – построена линия m' с конечными точками 3, 4 и определена точка 5 пересечения отрезков.

Масштабируем линию m' так, чтобы ее конечные точки совместить с точками 3, 5:

- ◆ Масштаб  \ Выбор объектов: укажите линию m' \ Базовая точка: укажите точку 3 \ Опорный отрезок \ Укажите длину: укажите точки 3, 4 \ Задайте новую длину: укажите точку 5 – построено второе сечение конической поверхности – линия n .

По сечениям m, n строим поверхность:

- ◆ Вытягивание по сечениям  \ Выберите поперечные сечения: укажите нижнее сечение m и верхнее сечение n \ Только поперечные сечения – построена поверхность;

- ◆ чтобы визуализировать поверхность, установите визуальный стиль «Реалистичный» или «Тонированный с кромками», – поверхность показана в виде сетки.

Количество ячеек каркаса определяется системной переменной «Isolines». По умолчанию значение задано равным 4. Рекомендуем для наглядности повысить плотность каркаса. Для этого с командной строки введите новое значение переменной, задав его в интервале 6...10:

- ◆ ISOLINES \ Новое значение: 8;
- ◆ после введения нового значения выполните регенерацию (обновление), введя с командной строки команду «Реген», или укажите кнопку «Регенерация»  в строке состояния. Поверхность перестроена с новым значением плотности каркаса.

Для того чтобы наглядно передать вид поверхности и применять к ней операции «Разрез», «Сечение», булевы операции и др., на основе поверхности следует создать солид. Для это к поверхности применим команду «Толщина». Толщину солида задайте в интервале 0.001–0.1 мм:

- ◆ Толщина  \ Выберите поверхность для придания толщины \ Укажите толщину: 0.01 – построен солид-объект.

Цилиндрическую поверхность (см. рис. 11.8б) можно построить, применив команду «Выдавливание», указав линию m и траекторию (S , 1). Второй вариант – команда «Вытягивание по сечениям», в которой первым сечением является линия m , вторым сечением ее копия m' в точке S :

- ◆ переместите коническую поверхность на свободное место и на отдельный слой. Перейдите в новый видовой экран, в котором слой с конической поверхностью заморозьте;
- ◆ одной из указанных команд постройте цилиндрическую поверхность;
- ◆ придайте 3D-моделям наглядность и сохраните в файле «Коническая и цилиндрическая поверхности.dwg».

12.3.2. 3D-модель пересечения конуса с прямой линией (к рис. 11.9а)

Конус: центр (53.4, 36.7, 0), радиус основания 27, высота 72. Отрезок m : ((17.7, 17.6, 7.9)(88.6, 31.2, 43.2)).

- ◆ Создайте файл на основе шаблона. МСК;
- ◆ постройте конус и отрезок прямой m по приведенным параметрам и координатам;
- ◆ командой «Конвертирование в 2D» постройте проекции отрезка m на Π_1 (отрезок m_1) и на Π_2 (отрезок m_2);
- ◆ Сечение  \ Укажите конус \ 3 точки \ укажите вершину S и две конечные точки отрезка m – построены отрезки сечения (S , 5), (S , 6);
- ◆ Сечение \ 3 точки \ укажите две конечные точки отрезка m и любую точку отрезка m_1 – построена гипербола сечения h ;

- ◆ Сечение $\setminus 3$ точки $\setminus$ укажите две конечные точки отрезка m и любую точку отрезка m_2 – построен эллипс e сечения;
- ◆ убедитесь, что все три сечения пересекаются с прямой m в точках M, N ;
- ◆ придайте модели наглядность и сохраните в файле «Конус .dwg».

12.3.3. Чертеж кругового конуса

На поверхности конуса существуют два семейства геометрически простых линий: параллели и образующие. Параллели – это окружности, плоскость которых перпендикулярна оси конуса и центр расположен на этой оси. Образующие – прямые линии, проходящие через вершину конуса.

Чтобы на чертеже построить точку на поверхности конуса, ее нужно связать с параллелью или образующей. Рассмотрим примеры.

- ◆ В файле «Конус .dwg» на Листе по приведенным выше координатам 3D-модели постройте проекции конуса и отрезка прямой m . В глазомерной пропорции, как на рис. 11.9б, нанесите маркеры точек K_1, V_2, L_2 и проекции горизонтали h .

Построение точки с помощью образующей конуса. Пусть для точки K (рис. 11.9б) задана горизонтальная проекция K_1 . Чтобы построить ее фронтальную проекцию, можно построить образующую S_1-2_1 , построить фронтальную проекцию этой образующей S_2-2_2 и найти точку K_2 по вертикальной линии связи. Если задана фронтальная проекция K_2 , то для нахождения горизонтальной проекции этой точки проводим фронтальную проекцию образующей S_2-2_2 , находим S_1-2_1 и по линии связи находим K_1 .

Точки на осях и на очерках проекций конуса. Проекции этих точек находим по принадлежности образующим, на которых расположены эти точки. Например, точка V расположена на фронтально очерковой образующей v и имеет фронтальную проекцию V_2 . Поскольку горизонтальная проекция этой образующей v_1 совпадает с осью горизонтальной проекции конуса, то горизонтальная проекция точки V_1 расположена на этой оси. Справедлив обратный вывод. Если точка имеет проекцию V_1 , расположенную на горизонтальной оси конуса, то фронтальная проекция этой точки V_2 будет на фронтальном очерке конуса, т. е. на образующей v_2 .

Построение точки с помощью параллели. Пусть для точки L задана фронтальная проекция L_2 . Для нахождения горизонтальной проекции по точкам 3_2 и 3_1 строим дугу параллели p'_1 . По вертикальной линии связи на этой параллели находим искомую проекцию L_1 . Если для точки L задана горизонтальная проекция L_1 , то для нахождения фронтальной проекции этой точки проводим дугу параллели p'_1 , находим точки 3_1 и 3_2 , по точке 3_2 проводим горизонтальную линию как проекцию параллели p'_2 . По вертикальной линии связи находим искомую проекцию L_2 .

- ◆ Постройте недостающие проекции точек K, V, L .

Пересечение конуса с горизонталью. Для нахождения точек D, E пересечения прямой h , являющейся горизонталью, с конусом реализуем алгоритм 1-й позиционной задачи. Через прямую h введем горизонтальную секущую плоскость α , задав ее проекцией α_2 . Строим параллель p_1 как пересечение плоско-

сти α и конуса. На пересечении параллели с прямой h_1 находим точки D_1, E_1 . По проекционной связи и по принадлежности прямой h_2 находим точки D_2, E_2 .

Пересечение конуса с прямой общего положения m (рис. 11.9б). Применим алгоритм 1-й позиционной задачи. Зададим на прямой m две произвольно расположенные точки 1, 2. Секущую плоскость α , необходимую для реализации алгоритма, зададим проходящей через вершину конуса S и точки 1, 2. Следуя алгоритму, найдем пересечение α с поверхностью конуса. Поскольку α проходит через вершину конуса, то пересечение произойдет по двум образующим конуса. Для их нахождения по точкам $S_2, 1_2, 2_2$ строим прямые a_2, b_2 . На их пересечении с плоскостью основания конуса находим точки $3_2, 4_2$. По проекционной связи находим $3_1, 4_1$ и строим прямую c_1 . На ее пересечении с окружностью основания конуса находим точки $5_1, 6_1$ и строим образующие $(S_1, 5_1)$ и $(S_1, 6_1)$. На пересечении этих образующих с прямой m находим точки M_1, N_1 . Затем по проекционной связи находим точки M_2, N_2 . В итоге найдены проекции искоемых точек пересечения прямой m с поверхностью конуса.

- ◆ Постройте точки пересечения горизонтали h и прямой m с поверхностью конуса.

Для наглядности и контроля точности выполненных построений следует по проекционной связи построить фронтальные проекции точек $5_2, 6_2$ и проекции образующих $(S_2, 5_2), (S_2, 6_2)$. Эти проекции должны пересечь m_2 в ранее найденных точках M_2, N_2 .

12.4. 3D-модель цилиндра (см. рис. 11.10а)

Параметры 3D-модели в МСК. Цилиндр: центр основания, в МСК: (47.8, 27.2, 22), радиус 13.5, высота 38. Отрезок $m((62.3, 8.4, 53.1)(23.5, 26.6, 28.8))$.

- ◆ Создайте новый файл на основе шаблона. МСК. Скройте плоскость Π_3 ;
- ◆ по приведенным параметрам постройте цилиндр и отрезок m ;
- ◆ постройте отрезок  оси цилиндра, соединив точки центра его оснований. В панели «Свойства» задайте для нижней точки отрезка значение Z-координаты равным нулю;
- ◆ постройте окружность  с центром в нижней точке отрезка оси, радиусом, равным радиусу основания цилиндра $r = 13.5$;
- ◆ командой «Конвертирование в 2D» постройте проекции отрезка и цилиндра на Π_1 и Π_2 ;
- ◆ Сечение  \ укажите цилиндр \ 3 точки \ укажите конечные точки отрезка m и конечную точку отрезка m_1 – построено прямоугольное сечение цилиндра;
- ◆ в режиме «ОРТО» скопируйте сечение на свободное место;
- ◆ повторите построение сечения, задав третьей точкой секущей плоскости конечную точку отрезка m_2 – построен эллипс сечения. Скопируйте его на свободное место;
- ◆ придайте модели наглядность.

Построение чертежа выполните на Листе. Параметры проекций задайте по параметрам 3D-модели. Методика построения чертежа приведена в разделе 11.4. Если предварительно была построена 3D-модель, то для построения чертежа рационально применить команду «2D Вид» (см. раздел 5.2.3).

- ◆ Модель и чертеж сохраните в файле «Цилиндр .dwg».

12.5. 3D-модель и чертеж сферы (см. рис. 11.11)

Параметры 3D-модели в МСК. Сфера: центр (49.3, 31.5, 49.1), радиус 25.2; Отрезок $h((15.0, 35.9, 69.5)(69.7, 11.4, 69.5))$; отрезок $f((28.3, 11.1, 32.5)(80.8, 11.1, 76.3))$; отрезок $k((46.4, 38.7, 82.0)(25.63, 8.0, 43.6))$.

Построение 3D-модели (см. рис. 11.11а):

- ◆ Создайте новый файл на основе шаблона. МСК. Скройте плоскость Π_3 ;
- ◆ по приведенным параметрам постройте сферу и отрезки h, f, k ;
- ◆ Сечение \ Выберите объекты: укажите сферу \ XY \ укажите точку центра сферы – построен экватор сферы e ;
- ◆ Сечение \ укажите сферу \ XY \ укажите конечную точку горизонтали h – построена параллель c' ;
- ◆ Сечение \ укажите сферу \ ZX \ укажите точку центра сферы – построен главный меридиан сферы m ;
- ◆ Сечение \ укажите сферу \ ZX \ конечную точку фронтоли f – построена окружность c ;
- ◆ командой «Конвертирование в 2D» постройте проекции отрезков h, f, k и окружностей c, e, c' на плоскости Π_1, Π_2 ;
- ◆ Сечение \ укажите сферу \ ZX \ укажите точку центра сферы – построен главный меридиан сферы m ;
- ◆ Сечение \ укажите сферу \ 3 точки \ укажите две конечные точки отрезка k и какую-либо точку отрезка k_2 – построена окружность c'' ;
- ◆ постройте проекцию окружности c'' на Π_1 – получен эллипс c_1'' ;
- ◆ в точки пересечения отрезков h, f, k со «своими» сечениями поставьте маркеры точек, применив привязку «Пересечение»;
- ◆ придайте модели наглядность и сохраните в файле «Сфера .dwg».

Построение чертежей

Чертеж с построением точек на поверхности сферы и точек пересечения прямых частного положения со сферой приведен в разделе 11.5.3 (см. рис. 11.11б). Там же приведена методика его построения. Этот чертеж выполните на Листе в файле «Сфера .dwg». Параметры проекций задайте по параметрам 3D-модели. Если предварительно была построена 3D-модель, то для построения чертежа рационально применить команду «2D Вид» (см. раздел 5.2.3).

Рассмотрим следующий чертеж (рис. 12.6а) – построение точек пересечения прямой общего положения со сферой. На 3D-модели (см. рис. 11.11а) это отрезок k . На Листе в файле «Сфера .dwg» постройте проекции сферы и отрезка k .

Параметры сферы и отрезка задайте по параметрам 3D-модели или постройте проекции как 2D-виды по предварительно построенной 3D-модели.

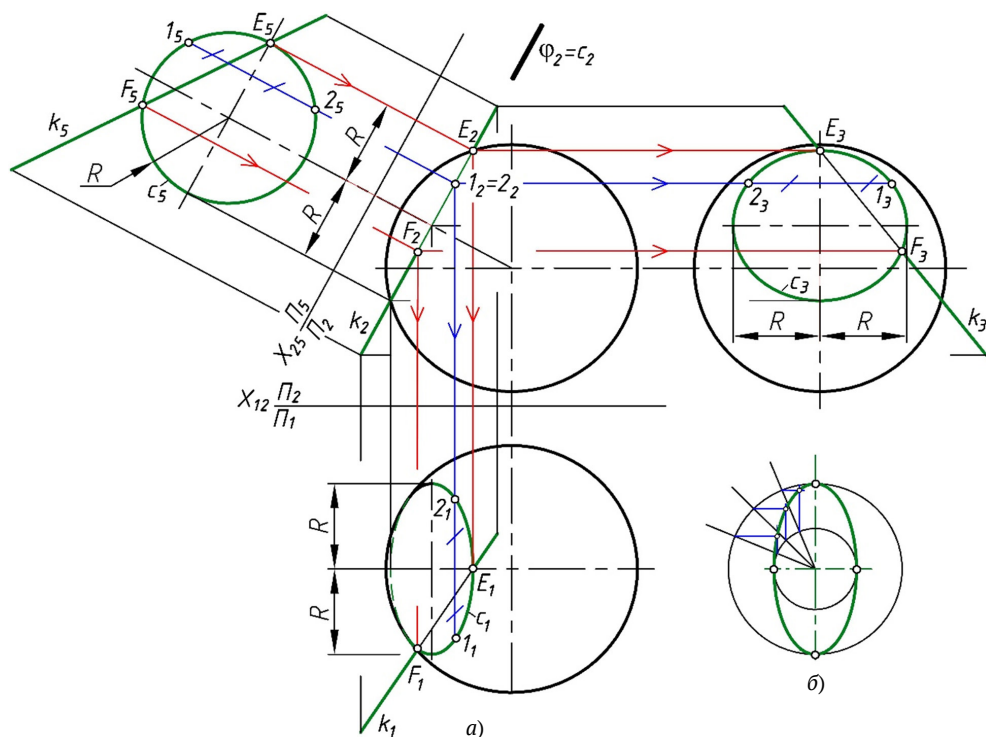


Рис. 12.6. Чертеж сферы (а) и построение эллипса (б)

Для решения на чертеже построено сечение сферы фронтально проецирующей плоскостью φ , заданной через прямую k : $\varphi_2 \supset k_2$. Введена дополнительная плоскость $\Pi_5 \parallel \varphi$. На эту плоскость сечение отображено в истинном виде как окружность c_5 . Найдены проекции искомых точек $F_5, E_5 = k_5 \cap c_5$. Обратными построениями найдены проекции этих точек на Π_1, Π_2, Π_3 .

На том же чертеже приведено решение задачи о построении сечения сферы фронтально проецирующей плоскостью φ . Построен истинный вид сечения – окружность c_5 . Для построения проекций сечения на $\Pi_1 \dots \Pi_3$ можно выполнить обратные построения точек этой окружности. В качестве примера показаны проекции точек 1 и 2.

Для сокращения и повышения точности построений учтено, что проекциями сечения являются эллипсы. На окружности c_5 определены точки главных осей эллипсов. По известному методу (рис. 12.6б) по этим точкам построены эллипсы проекций c_1, c_3 .

Если секущая плоскость задана как плоскость общего положения, то требуется дополнительное преобразование чертежа, при котором плоскость станет проецирующей. После этого сечение находят как для проецирующей плоскости.

- ♦ Выполните построение чертежа (рис. 12.6а) и сохраните его в файле «Сфера .dwg».

12.6. Построение сферы, заданной четырьмя точками

Задача: заданы четыре точки A, B, C, D (рис. 12.7а). Найти центр сферы, определяемой этими точками.

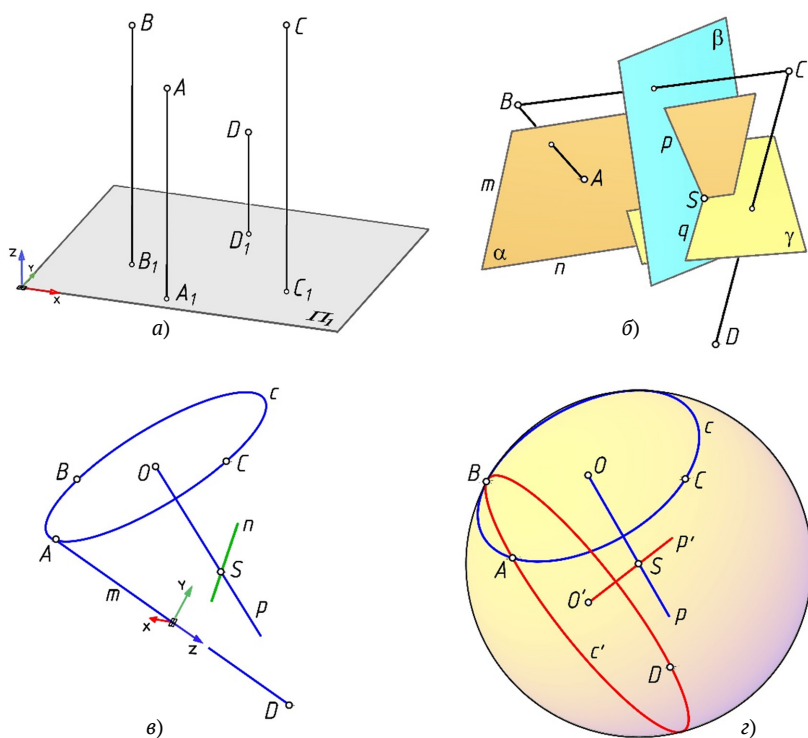


Рис. 12.7. Построение сферы по четырем точкам:
а – дано; б – алгоритм 1; в – алгоритм 2; г – алгоритм 3

Поскольку заданные точки расположены на сфере, то никакие три из них не должны принадлежать прямой линии и все четыре точки не должны быть расположены в одной плоскости. В остальных случаях существует единственная сфера, на поверхности которой эти четыре точки расположены. Известны аналитические и геометрические доказательства этого положения. Мы рассмотрим геометрические доказательства, которые вытекают из приведенных ниже трех алгоритмов построения сферы при заданных ее четырех точках. Центр сферы рассматривается как точка, равноудаленная от заданных точек. Алгоритмы приведем с учетом их реализации средствами Платформы napo-CAD.

Пусть точки имеют координаты в МСК: $A(37.4, 4.9, 59.1)$; $B(21.7, 22.7, 66.6)$; $C(64.3, 20.0, 73.9)$; $D(42.8, 52.0, 27.9)$.

- ◆ Создайте файл на основе шаблона, установите МСК и по приведенным выше координатам постройте маркеры точек A, B, C, D (рис. 12.7а).

Алгоритм 1. Из заданных точек формируют три пары точек. Для каждой пары создают плоскость, являющуюся ГМТ, равноудаленных от точек выбранной пары (см. рис 12.6б). Определяют вершину трехгранного угла, образованного этими плоскостями. Вершина угла, как общая точка этих плоскостей, будет равноудалена от заданных четырех точек, т. е. будет искомым центром сферы. Реализация алгоритма 1 (рис. 12.7б).

- ◆ Построим три отрезка, соединив пары точек. Выбор пар произволен. Например, отрезки AB, BC, CD .
- ◆ Для каждого отрезка построим плоскость, перпендикулярную отрезку и проходящую через его середину , например плоскость $\alpha(AB)$ для отрезка AB . Плоскости визуализируем, построив в них прямоугольники  произвольных размеров и преобразовав их в области .
- ◆ В визуальном стиле «Концептуальный» должна быть видна вершина образованного ими трехгранного угла. Если плоскости не пересекаются и вершина не видна, то, перемещая прямоугольники или их ручки и переопределяя области, следует добиться их взаимного пересечения.

На рис. 12.7б показан трехгранный угол, образованный плоскостями $\alpha(AB)$, $\beta(BC)$, $\gamma(CD)$. Видно ориентировочное положение вершины угла. Требуется определить координаты вершины – точки S :

- ◆ ко всем областям примените команду «Выдавливание»  с величиной 0.001. Образовавшиеся солид-объекты объедините . Искомая точка S образована линиями пересечения солид-объектов;
- ◆ с привязкой «Пересечение» поставьте маркер точки S и определите ее координаты.

Придание толщины 0.001 при выдавливании приводит к такой же погрешности решения. Чтобы исключить погрешность, можно до образования солидов:

- ◆ построить отрезки m, n по ребрам подготовленной области α . Область α можно удалить (скрыть);
- ◆ Выдавливание \ Выберите объект для выдавливания: укажите отрезок m \ Траектория \ Выберите траекторию: укажите отрезок n – на месте области α построен объект-поверхность α ;
- ◆ Сечение  \ укажите поверхность α \ Объект \ укажите область β – построен отрезок пересечения p ;
- ◆ Сечение \ укажите поверхность α \ Объект \ укажите область γ – построен отрезок пересечения q ;
- ◆ искомая точка $S = p \cap q$. Точка построена с предельной точностью 10^{-8} .

Алгоритм 2. Выберем произвольно три точки из четырех, например точки A, B, C (рис. 12.7в), и построим по ним окружность – окружность s . Из центра окруж-

ности, точки O , восстановим перпендикуляр p к плоскости окружности. Точки перпендикуляра p равноудалены от выбранных точек A, B, C . Выберем одну из точек A, B, C , например точку A , и соединим ее отрезком m с оставшейся точкой D . Зададим плоскость Δ , проходящую через середину отрезка m перпендикулярно ему. Точки плоскости Δ равноудалены от концов отрезка m , т. е. от точек A, D . Найдем точку S пересечения перпендикуляра p с плоскостью Δ . Поскольку эта точка принадлежит перпендикуляру p , то она равноудалена от точек A, B, C . Поскольку точка S принадлежит плоскости Δ , то равноудалена от точек A, D . Из этого следует, что точка S равноудалена от заданных четырех точек A, B, C, D , т. е. может быть принята за центр искомой сферы.

Реализация алгоритма 2 (рис. 12.7в):

- ◆ установите ПСК  по точкам A, B, C ;
- ◆ постройте окружность по точкам A, B, C ;
- ◆ установите режим «ОПТО» и командой «Отрезок» восстановите перпендикуляр, отрезок p , из центра окружности к плоскости этой окружности. Центр окружности, точку O , определите объектной привязкой «Центр»;
- ◆ постройте отрезок m (A, D);
- ◆ установите ПСК, применив опцию «Z-ось» . Начало координат задайте в средней точке отрезка AD , направление оси Z – в точку D ;
- ◆ применив команду «Конвертирование в 2D», постройте проекцию n перпендикуляра p на плоскость XY ПСК;
- ◆ поставьте маркер в точку пересечения отрезков p и n . Найденная точка S является центром искомой сферы.

Алгоритм 3 (рис. 12.7г). Если две окружности, расположенные в пересекающихся плоскостях, имеют две общие точки, то они расположены на поверхности единой сферы. Такие окружности можно построить по четырем заданным точкам. Выбор точек произвольный. Перпендикуляры, восстановленные из центров окружностей, взаимно пересекаются. Точка их пересечения является центром сферы.

Реализация алгоритма 3:

- ◆ выберем три точки из заданных четырех точек, установим по ним ПСК  и построим окружность  с (A, B, C) (см. рис. 12.7г). К плоскости окружности из центра O восстановим перпендикуляр p ;
- ◆ построим вторую окружность, задав ее оставшейся точкой D и любыми двумя точками из A, B, C . Например, окружность c' по точкам A, B, D . Восстановим перпендикуляр p' к плоскости этой окружности из ее центра O' ;
- ◆ найдем искомую точку S как точку пересечения отрезков p и p' . Это центр сферы, заданный четырьмя точками A, B, C, D .

Завершение построений:

- ◆ для проверки решения командой «Дист» определите расстояние от найденной точки S до каждой из заданных точек. Значения должны быть равными. Это радиус сферы;

- ♦ для наглядности постройте сферу , указав ее центр в точке S . Для определения радиуса укажите одну из заданных точек. Перейдите на визуальный стиль «Концептуальный». Убедитесь, что маркеры заданных четырех точек находятся на поверхности сферы.

Решение на проекционном чертеже (рис. 12.8)

Построение чертежа выполним согласно алгоритму 1, т. е. определим вершину трехгранного угла – точку S . В отличие от 3D-модели, для повышения наглядности чертежа сформируем отрезки AB, AC, BD (рис. 12.8а).

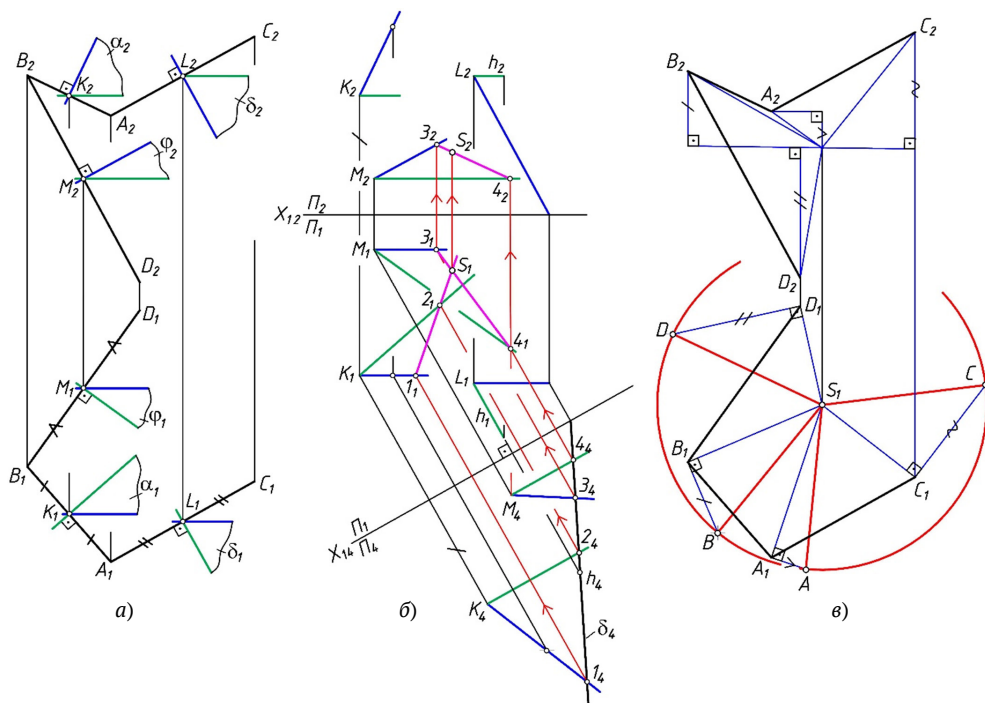


Рис. 12.8. Определение центра сферы, заданной четырьмя точками.

Чертеж по алгоритму 1: а – построение плоскостей; б – решение; в – проверка решения

В средней точке каждого из отрезков построим плоскость, перпендикулярную отрезку, это плоскости $\alpha(AB), \delta(AC), \varphi(BD)$. Каждую плоскость зададим горизонталью (зеленый отрезок) и фронталью (синий отрезок) (см. раздел 6.8.9).

Введем (рис. 12.8б) дополнительную плоскость Π_4 , перпендикулярную горизонтали h плоскости δ . На Π_4 плоскость δ стала проецирующей – прямая δ_4 . Определим прямые (1, 2) и (3, 4) пересечения этой плоскости с плоскостями α и φ . Обратными построениями найдем горизонтальные проекции этих прямых и точку их пересечения S_1 . По принадлежности прямой (3, 4) найдем фронтальную проекция точки S_2 . Задача решена.

На рис. 12.8в показана проверка правильности решения. Для этого способом прямоугольного треугольника (см. раздел 7.2.3) определены длины отрезков, соединяющих найденную точку S с заданными точками. Построения показана

ли, что конечные точки отрезков принадлежат единой окружности, т. е. имеют равную длину. Сама окружность является горизонтальной проекцией сферы, имеющей центр в точке S и радиус, равный длине каждого из отрезков.

- Лектору: сохраните 3D-модели и чертеж в файле «Сфера по 4 точкам .dwg». На лекции откройте файл и поясните построение 3D-модели сферы одним из приведенных алгоритмов, а также построение чертежа.

12.7. 3D-модели коник

Рассмотрим алгоритмы построения 3D-моделей коник и определение основных метрические характеристики коник. К ним относятся оси коник, их вершины, точки центра, асимптоты.

12.7.1. Методика построения коник

Построим 3D-модели эллипса, параболы и гиперболы как сечения прямого кругового конуса. Параметры конуса для изучения свойств коник могут быть произвольными, но рекомендуем придать конусу наглядную форму:

- ◆ перейдите в окно аксонометрии, установите систему МСК, визуальный стиль «Концептуальный»;
- ◆ Конус  \ Центр основания: 0,0 \ Радиус основания: 25 \ Высота: 65.

Конус следует дополнить верхней чашей. Для этого:

- ◆ перейдите в экран вида спереди. По пиктограмме осей убедитесь, что в экране установлен ортогональный вид спереди  или установите его . Включите режим «ОРТО». Примените команду «Зеркало» , в ней задайте ось отражения, указав вершину (привязка «Конечная») и отведя курсор вправо.

Сечения конуса будем строить командой «Сечение». Секущую плоскость зададим как фронтально проецирующую, определяя ее отрезком прямой линии на плоскости P_2 . Для наглядного отображения коник построим их истинный вид.

12.7.2. Эллипс

Для создания эллипса построим сечение конуса фронтально проецирующей плоскостью Σ (см. рис. 12.9а):

- ◆ создайте файл на основе шаблона. Координатные плоскости можно скрыть;
- ◆ постройте конус по приведенным выше параметрам. Для эллипса достаточно нижней чаши конуса;
- ◆ перейдите в экран вида спереди. Убедитесь, что пиктограмма осей в видовом экране имеет вид , иначе установите в экране ортогональный вид спереди ;
- ◆ постройте отрезок прямой линии, пересекающей все образующие конуса (его нижнюю чашу);

- ◆ ПСК 3 точки $\downarrow^3$ \ Укажите начало: с объектной привязкой укажите нижнюю точку отрезка \ Укажите точку по оси X: укажите вторую точку отрезка \ Применить – ось X ПСК направлена вдоль отрезка, ось Z – перпендикулярна экрану.

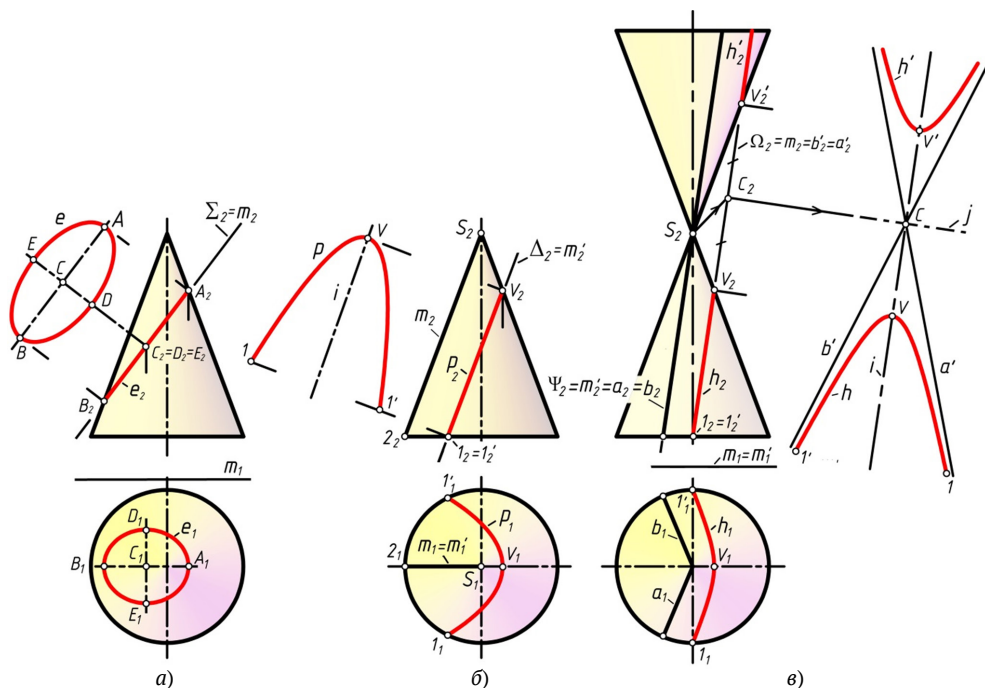


Рис. 12.9. Ортогональные проекции (виды) и истинные виды конических сечений:
а – эллипс; б – парабола; в – гипербола

Строим сечение плоскостью ZX и отображаем его в истинном виде:

- ◆ Сечение \ укажите конус \ 3 точки \ $0,0 \setminus 1,0 \setminus 0,0,1$ – построено сечение;
- ◆ перейдите в экран аксонометрии. Скопируйте сечение на свободное место;
- ◆ сечение получено как объект «Область». Командой «Разбивка» преобразуйте объект в сплайн;
- ◆ скопируйте отрезок m за его среднюю точку в центр сплайна. Центр определите как привязку «Центр масс» – отрезок принял положение большой оси эллипса;
- ◆ скопируйте видовой экран. В нем установите ПСК по трем точкам $\downarrow^3$: две из них на пересечении эллипса с осью, третья точка – произвольная точка эллипса;
- ◆ с командной строки выполните команду «План» \ Текущая – установлен истинный вид сечения;
- ◆ постройте отрезок, перпендикулярный отрезку большой оси, проходящий через центр масс сечения, – это малая ось эллипса;

- ◆ поставьте маркеры  в конечные точки главных осей A, B, D, E и в центр эллипса – точку C .

12.7.3. Парабола

Построим сечение конуса фронтально проецирующей плоскостью Δ (рис. 12.9б), параллельной фронтально очерковой образующей конуса:

- ◆ создайте файл на основе шаблона. Координатные плоскости можно скрыть;
- ◆ постройте конус по приведенным выше параметрам, достаточно нижней чаши конуса;
- ◆ в окне вида спереди постройте отрезок m из вершины конуса (привязка «Конечная») в точку 2 основания конуса (привязка «Квадрант»);
- ◆ убедитесь, что пиктограмма осей в видовом экране имеет вид , иначе установите в экране ортогональный вид спереди .
- ◆ скопируйте отрезок m очерковой образующей вправо – построен отрезок m' ;
- ◆ как в примере с эллипсом (см. выше), установите ПСК, направив ось X вдоль отрезка m' . Выполните сечение конуса плоскостью ZX – получена парабола p как область. Скопируйте сечение вместе с отрезком m' на свободное место. Извлеките сплайн. Отобразите истинный вид сечения;
- ◆ поставьте маркер в пересечение отрезка m' и сплайна p – построена вершина параболы – точка V .

12.7.4. Гипербола

Для построения гиперболы секущую плоскость Ω (рис. 12.9в) зададим так, чтобы она пересекла две чаши конуса:

- ◆ постройте конус с двумя чашами;
- ◆ установите ПСК . Постройте отрезок m , пересекающий обе чаши;
- ◆ как в предыдущих примерах (см. выше), установите ПСК, направив ось X вдоль отрезка m . Выполните сечение конуса плоскостью ZX . Скопируйте сечение вместе с отрезком m на свободное место. Извлеките сплайн – это гипербола h ;
- ◆ постройте отрезок i «действительной» оси гиперболы. Для этого соедините вершины гиперболы V, V' (привязка «Середина») и продлите отрезок в обе стороны;
- ◆ в средней точке отрезка VV' поставьте маркер центра гиперболы, это точка C .

Параметрами гиперболы являются ее асимптоты. Для построения асимптот постройте сечение конуса плоскостью ψ , параллельной плоскости Ω , в которой была получена гипербола, и проходящей через вершину конуса. Сечение переместите в центр гиперболы:

- ◆ восстановите (повторите) построение ПСК для плоскости Ω , в которой была получена гипербола;

- ◆ перенесите начало координат  в вершину конуса;
- ◆ выполните сечение конуса плоскостью ψ . В сечении получены отрезки a, b – образующие конуса;
- ◆ скопируйте отрезки a, b из вершины конуса в центр гиперболы – построены асимптоты a', b' ;
- ◆ сечение вместе с осью i и асимптотами a', b' скопируйте на свободное место и отобразите в истинном виде.

В курсе начертательной геометрии применяют следующее определение гиперболы: *гипербола возникает, если секущая плоскость параллельна двум образующим конуса*. На рис. 12.9б, на виде сверху, показана только нижняя чаша конуса, на которой наглядно видны проекции двух образующих, отрезки a_1, b_1 , которым параллельна плоскость гиперболы Ω .

Построенные коники из плоскости сечений, в которых они были созданы, можно через буфер обмена копировать в любую другую плоскость или на Лист.

Параметры коники при сохранении ее типа можно редактировать, выполняя разномасштабное масштабирование. Для этого из коники создать блок, затем вставить его с различным значением масштаба по осям. Например, построив одну параболу или гиперболу, можно получить множество парабол или гипербол с различными параметрами.

При построении 3D-моделей коник (см. рис. 11.12) рекомендуется для наглядности секущие плоскости визуализировать прямоугольниками, придав им прозрачность 30...50 %. Верхние чаши конусов выполнить как тонкостенные оболочки. Алгоритм приведен в разделе 10.10 при построении оболочки из солид-конуса.

На проекционном чертеже коники строят по точкам. Примеры построения чертежей коник приведены на рис. 11.11, 11.10.

- ◆ Сохраните модели коник в файле «Построение коник .dwg».

12.8. Шары Данделена

Исследование многочисленных свойств конических сечений было начато в III–IV вв. до нашей эры (см. раздел 11.6). Однако наглядное доказательство тому, что в сечении конуса плоскостью в зависимости от положения этой плоскости образуются эллипс, гипербола или парабола, было предложено лишь 1822 г. бельгийским инженером Ж. П. Данделеном. Рассмотрим это доказательство, которое основано на построении 3D-модели и поэтому близко к содержанию нашего курса. Приведем вариант доказательства для эллипса.

12.8.1. Теорема Данделена

Дано (рис. 12.10а): прямой круговой конус и плоскость Σ , пересекающая все его образующие по одну сторону от вершины конуса. Требуется доказать, что линия сечения e является эллипсом.

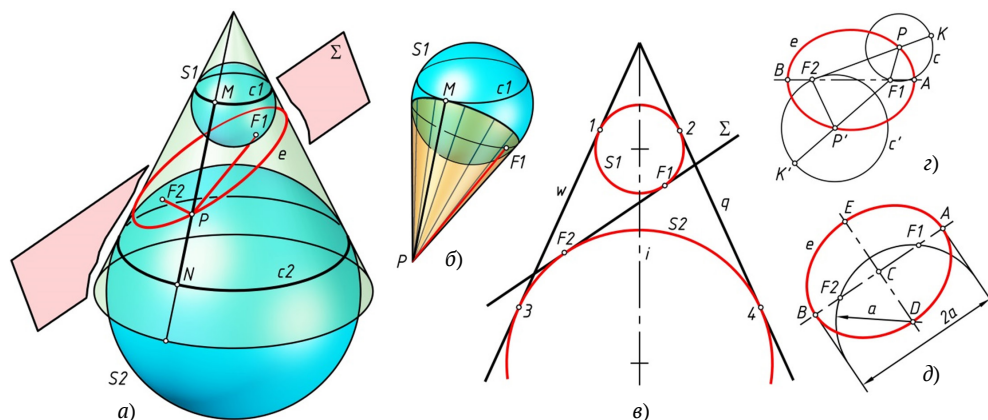


Рис. 12.10. Шары Данделена:

a – 3D-модель теоремы; *б* – касательные к сфере из одной точки;
в – разметка построений; *г* – проверка точности построений;
д – построение точек фокуса

Доказательство основано на двух геометрических положениях.

1. Кроме рассмотренного выше определения эллипса как конического сечения, известно определение эллипса как плоской кривой линии, для каждой точки которой сумма расстояний до двух неподвижных точек этой плоскости является величиной постоянной. Точки, до которых определяется расстояние, называются точками фокуса.
2. Отрезки касательных прямых, проведенных к сфере из произвольной внешней точки, имеют одинаковую длину. Примером являются касательные, построенные из точки P к сфере $S1$ (рис. 12.10б). Все касательные образуют прямой круговой конус с вершиной в точке P . Поэтому образующие конуса имеют одинаковую длину. В том числе равны длины образующих PM и $(P, F1)$.

Представим, что в конус вписаны две сферы, расположенные по разные стороны от секущей плоскости Σ и касающиеся этой плоскости. Сфера $S1$ касается конуса по окружности $c1$ и касается плоскости Σ в точке $F1$. Сфера $S2$ касается конуса по окружности $c2$ и плоскости в точке $F2$.

На линии сечения e зададим произвольную точку P и соединим ее с точками $F1, F2$. Из вершины конуса построим образующую, проходящую через точку P , и найдем точки M, N ее пересечения с окружностями $c1, c2$.

Отрезки $(P, F1)$ и PM имеют равную длину, как касательные из одной точки к общей сфере $S1$. Отрезки $(P, F2)$ и PN также имеют равную длину, как касательные из одной точки к сфере $S2$.

Запишем равенства длин отрезков касательных, проведенных из точки P к сферам $S1, S2$. Для сферы $S1$: $[P, F1] = [PM]$. Для сферы $S2$: $[P, F2] = [PN]$. Суммируем левые и правые части равенств: $[P, F1] + [P, F2] = [PM] + [PN] = [MN]$. То есть сумма расстояний от точки P линии e до точек фокусов $F1, F2$ равна дли-

не отрезка MN , который является отрезком образующей конуса, заключенным между двумя касательными окружностями конуса c_1, c_2 . Длина такого отрезка является постоянной для всех образующих конуса и не зависит от выбора точки P . Следовательно, сумма расстояний от произвольной точки линии e до точек F_1, F_2 является постоянной. По приведенному выше определению это свойство является признаком эллипса. Следовательно, линия e является эллипсом, а точки F_1 и F_2 являются точками фокуса. Теорема доказана.

12.8.2. Построение 3D-модели теоремы Данделена

Построение 3D-модели теоремы позволит лучше понять доказательство теоремы и является хорошим упражнением на геометрически точные 3D-построения. Построение требует определенной квалификации по 3D-моделированию в Платформе napoCAD, которая к настоящему моменту освоения нашего курса должна быть накоплена.

Разметка модели на плоскости (рис. 12.10в)

- ◆ Создайте файл на основе шаблона. Координатные плоскости можно скрыть;
- ◆ перейдите в экран вида спереди. Убедитесь, что пиктограмма осей в видовом экране имеет вид , иначе установите в экране ортогональный вид спереди .
- ◆ постройте ось конуса i и образующую q : Отрезок $\setminus 0,0 \setminus 0,74 \setminus 34,0 \setminus$. Командой «Зеркало»  постройте вторую образующую w ;
- ◆ постройте отрезок, задающий секущую плоскость Σ : Отрезок: $-36,12 \setminus 28,55 \setminus$;
- ◆ постройте очерк верхней вписанной сферы S_1 : команда «Окружность» с опцией «3 точки касания»  \ укажите отрезки образующих q, w и отрезок Σ приблизительно в ожидаемых точках касания 1, 2, F_1 – построена окружность S_1 , касательная к отрезкам q, w, Σ ;
- ◆ постройте касательную окружность для сферы S_2 , указав приблизительное положение точек 3, 4, F_2 , – построена окружность S_2 ;
- ◆ поставьте маркеры  в точки касания 1, 2, 3, 4, F_1, F_2 . Точки определяйте с применением объектной привязки «Пересечение».

Построения в объеме

- ◆ Перейдите на новый слой. Перейдите в окно аксонометрии (см. рис. 12.10а). МСК. Визуальный стиль «Концептуальный». Разметка в аксонометрии расположена в плоскости ZX ;
- ◆ Сфера \ Центр: с привязкой «Центр» укажите центр окружности S_1 \ Радиус: с привязкой «Ближайшая» укажите точку окружности S_1 – построена сфера S_1 ;
- ◆ Сфера  \ Центр: укажите центр окружности S_2 \ Радиус: укажите точку окружности S_2 – построена сфера S_2 ;

- ◆ Конус  \ Центр основания: 0,0 \ Радиус: 34 \ Высота: 74 – построен конус с осью i и образующими q, w ;
- ◆ в панели «Свойства» придайте конусу прозрачность 50;
- ◆ ПСК 3 точки  \ Новое начало координат: укажите нижнюю конечную точку отрезка \ Укажите точку по оси X : укажите верхнюю конечную точку отрезка \ Применить – плоскость XU установлена как секущая плоскость;
- ◆ Сечение  \ Выберите объекты: укажите конус \ 3 точки \ Первая точка секущей плоскости: 0,0 \ Вторая точка на плоскости: 1,0 \ Третья точка: 0,1 – построено сечение конуса плоскостью как область в виде эллипса e .

Прямоугольник секущей плоскости

- ◆ Временно скройте (изолировать \ скрыть) конус; убедитесь, что ПСК установлена в секущей плоскости;
- ◆ Прямоугольник по 2 точкам  \ Первый угол: $-10,25$ \ Второй угол: $85, -25$ – построен прямоугольник плоскости Σ как объект «Полилиния»;
- ◆ восстановите изображение конуса;
- ◆ в аксонометрии, в МСК командой «Сечение», постройте сечения конуса двумя горизонтальными плоскостями XU , задавая их положение по разметке в точках 1 и 3. К сечениям примените разбивку. Построены окружности $c1$ и $c2$ касания сфер с поверхностью конуса как объекты «Область»;
- ◆ из прямоугольника создайте область . Придайте области прозрачность 50. Области сечений $e, c1, c2$ командой «Разбивка» преобразуйте в линии.

Завершение модели

- ◆ На линии сечения e задайте маркер точки P , точку можно задать в произвольном месте этой линии, но обязательно с привязкой «Ближайшая»;
- ◆ соедините отрезком прямой точку P с вершиной конуса. Построенный отрезок образующей конуса удлините так, чтобы он пересек окружность $c2$. Поставьте маркеры точек M, N пересечения образующей с окружностями касания конуса и сфер;
- ◆ соедините отрезками точку P с точками $F1, F2$, которые были построены в разметке;
- ◆ придайте модели наглядность: заморозьте слой с разметкой; задайте цвет объектам, как на рис. 12.10а; настройте источники света, редактируйте прозрачность конуса и прямоугольника плоскости.

3D-модель теоремы Данделена построена.

Исследование модели. Проверка точности построений

Выполним три проверки.

Первая проверка. Проверим, насколько точно полученное сечение e отвечает приведенному выше определению эллипса. Для проверки необходим истин-

ный вид линии. Можно отобразить его в видовом экране, применив команду «План». Сейчас применим другой вариант – вынос объекта на Лист:

- ◆ установите ПСК в плоскость прямоугольника секущей плоскости или по трем точкам линии сечения. Скопируйте в буфер памяти линию и маркеры точек $F1$, $F2$. Перейдите на Лист и вставьте из буфера скопированные объекты – на Листе построено истинное изображение линии пересечения с точками $F1$, $F2$ (рис. 12.10г);
- ◆ с привязкой «Ближайшая» поставьте на этой линии маркеры двух точек P и P' . Положение точек на линии произвольное.

Геометрическим построением определим суммарную длину отрезков, соединяющих точку P с точками $F1$, $F2$. Для этого построим окружность с центром в точке P и радиусом $[P, F1]$. Построим отрезок $(P, F2)$ и удлиним его до пересечения с окружностью в точке K . По построению длина $[F2, K] = [P, F1] + [P, F2]$. Повторим построения для точки P' и построим отрезок $(F1, K')$, для которого $[F1, K'] = [P', F1] + [P', F2]$.

Сравним длины отрезков $(F2, K)$ и $(F1, K')$. Командой «Единицы» установим предельную точность измерения и командой «Список» определим длину каждого из них. Значение практически совпадают. Возможно расхождение не более 10^{-6} . То есть длины отрезков можно считать равными.

Приведенные измерения можно повторить для любой точки, заданной на линии e . Сумма длин отрезков, соединяющих произвольную точку линии с точками $F1$, $F2$, останется прежней. Это является экспериментальным подтверждением, что линия e является эллипсом, а точки $F1$, $F2$ – фокусы эллипса.

Вторая проверка. По построению 3D-модели длина каждого из отрезков $(K, F2)$ и $(F1, K')$ должна быть равна длине отрезка MN образующей, заключенной между касательными окружностями $c1$, $c2$. Проверьте это, измерив длины командой «Список» или «Дист».

Алгоритм определения точек фокуса эллипса

Третья проверка. Применим к найденной линии e известный геометрический алгоритм определения точек фокуса эллипса (рис. 12.10д), если известны главные оси эллипса. Проверка заключается в сопоставлении точек $F1$, $F2$, найденных при построении модели, с точками, определяемыми приводимым алгоритмом.

- ◆ Отобразите линию с точками $F1$, $F2$ в истинном виде, например вынесите на Лист (см. выше проверку 1).

Найдем главные оси проверяемого эллипса и его центр:

- ◆ построим отрезок $F1, F2$ и удлиним его в обе стороны до пересечения с линией e . Отрезок AB – это большая ось эллипса;
- ◆ поставим маркер в среднюю точку большой оси – это центр эллипса, точка C ;
- ◆ через точку C построим отрезок $DE \perp AB$ – это малая ось эллипса;
- ◆ построим окружность с центром в точке C и радиусом CA ;

- ◆ переместим окружность, задав ее центр в точке D малой оси.

Точки пересечения окружности с большой осью – это точки фокусов эллипса. При точном построении модели эти точки должны совпасть с точками F_1, F_2 .

- ◆ Командой «Дист» определите расстояние между точками F_1, F_2 , построенными по модели, и точками, которые, согласно примененному алгоритму, должны быть у эллипса. Значения должны быть равными.

Теорема Данделена рассмотрена выше для эллипса как сечения конуса. Теорема справедлива и для других коник (гиперболы и параболы), а также для всех поверхностей вращения второго порядка (сфера, цилиндр, гиперboloиды, параболоиды). Изложение теоремы для всех вариантов ее применения можно найти в многочисленной литературе и в интернете.

- ◆ Сохраните 3D-модель теоремы Данделена в файле «Данделен .dwg».

12.9. «Мистический шестиугольник» Паскаля

Существует множество теорем, отражающих замечательные свойства конических сечений. Рассмотрим теорему, которая раскрывает такие свойства коник, что ее автор и современники называли их «мистическими», настолько эти свойства и теорема поразили их воображение. И хотя сегодня найдено множество доказательств этой теоремы, «мистические» свойства коник продолжают удивлять.

Речь идет о теореме Паскаля. Ее автор – Блез Паскаль – сформулировал теорему в 1640 г. Автору тогда было всего 16 лет. Сегодня он известен как французский математик, механик, физик, литератор, философ. Из школьного курса физики вы должны его знать как автора основного закона гидростатики.

Рассмотрим теорему Паскаля и ее «мистические» свойства. Одна из формулировок теоремы следующая:

Если точки 1, 2, 3, 4, 5, 6 расположены на одной конике, то независимо от их положения точки пересечения прямых, построенных по точкам (1, 2) и (4, 5), (2, 3) и (5, 6), (3, 4) и (6, 1), расположены на одной прямой.

Рассмотрим действие теоремы на примере имеющейся в Платформе naпoCAD коники – эллипса (можно взять окружность), для которого гарантирована предельная точность построения 10^{-8} .

- ◆ Перейдите на Лист и командой «Эллипс» постройте произвольный эллипс (рис. 12.11a);
- ◆ нанесите на эллипс маркеры шести точек, расположив их на эллипсе произвольно. Произвольно – значит не стремитесь к симметрии, равномерности или иной закономерности в расположении точек. Точки указывайте с привязкой «Ближайшая»;
- ◆ проставьте рядом с маркерами номера точек. В первом примере поставьте их последовательно (см. рис. 12.11a). Номера поставьте командой «Текст»;
- ◆ командой «Отрезок» соедините точки отрезками прямых по порядку принятой нумерации, т. е. в последовательности 1-2-3-4-5-6-1. Последний отрезок 6-1 замыкает ломаную линию, образуя «шестиугольник Паскаля»;

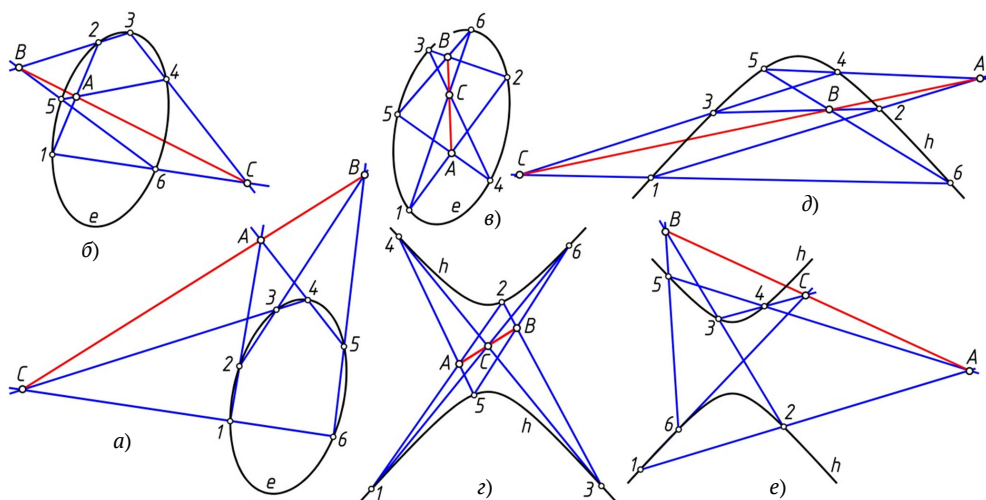


Рис. 12.11. Тестирование теоремы Паскаля:
а, б, в – примеры для эллипса; з, д, е – примеры для гиперболы

- ◆ найдите три точки пересечения следующих пар отрезков: $A = (1, 2) \cap (4, 5)$; $B = (2, 3) \cap (5, 6)$; $C = (3, 4) \cap (6, 1)$. Для нахождения этих точек отрезки следует удлинить до взаимного пересечения. В других примерах удлинение отрезков, всех или части из них, может не понадобиться;
- ◆ строим отрезки по точкам A, B, C . Последовательность соединения точек: от одной из конечных точек к средней, ко второй конечной. В рассматриваемом примере следует построить отрезки CA и AB . В других примерах последовательность соединения точек может быть иной, например AC и CB (рис. 12.11в). Точки указывайте с привязкой «Пересечение»;
- ◆ командой «Единицы» задаем предельную точность измерения углов, равную 10^{-8} ;
- ◆ командой «Список» определяем свойства построенных отрезков, в данном примере отрезков CA и AB . Находим в выводимой информации для каждого отрезка угол с осью X , измеренный в плоскости XY (угол в плоскости XY). Убеждаемся, что в рассмотренном примере эти углы равны между собой с предельной точностью, т. е. проверяемые отрезки принадлежат одной прямой. Эту прямую называют прямой Паскаля.

Переходим к «мистическим» свойствам. Измените нумерацию точек произвольным образом. Можно изменить и положение точек на эллипсе (рис. 12.11б, в). Повторите приведенный выше алгоритм построения прямой Паскаля для различного положения и произвольной нумерации точек. Если в первом примере шестиугольник Паскаля был выпуклым, то он может стать вогнутым или самопересекающимся. Убедитесь, что во всех примерах угол между отрезками, образующими прямую Паскаля, не превышает минимальной погрешности измерения 10^{-8} . Это дает основания считать, что эти отрезки принадлежат одной прямой.

Теорема Паскаля распространяется на все коники. Повторите тестирование теоремы для гиперболы (рис. 12.11з–е). Гиперболу постройте как сечение пря-

мого кругового конуса (см. выше, рис. 12.9в). Рекомендуемые параметры конуса и секущей плоскости:

- ◆ две чаши конуса с радиусом основания и высотой чаши, равными 50. Секущая плоскость расположена параллельно оси конуса на расстоянии от нее 20.

В видовом окне установите истинный вид построенной гиперболы или скопируйте ее на Лист через буфер памяти. Для ветвей гиперболы повторите построение прямой Паскаля при различных вариантах размещения точек и их нумерации. Убедитесь, что и в этих примерах проявляются «мистические» свойства коник, т. е. два отрезка, заданные точками A, B, C , «выстраиваются» в одну прямую.

Для параболы построение прямой Паскаля приведено в разделе 14.6.2 (см. рис. 14.3б).

Мы выполнили экспериментальное тестирование теоремы Паскаля. Доказательства этой теоремы приведены в аналитической геометрии. Доказательство, приведенное автором теоремы, Блезом Паскалем, за прошедшие почти четыре века не сохранилось.

- ◆ Сохраните построения в файле «Паскаль.dwg».

12.10. 3D-модели и чертеж тора

Рассмотрим построение моделей и чертежа тора к разделу 11.7.

Модели к рис. 11.13 «Типы тора»

- ◆ Создайте файл на основе шаблона. Скройте координатные плоскости.
- ◆ Задайте системной переменной ISOLINES \ Новое значение: 8 – это плотность каркаса моделей как количество изолиний по каждому из направлений каркаса.

Построение тора (см. рис. 11.13а) командой «Тор»

Параметры модели: радиус направляющей окружности $R = 28$, радиус образующей окружности $r = 16$:

- ◆ перейдите в экран аксонометрии, МСК;
- ◆ Тор  \ Центр: 0,0 \ Радиус: 28 \ Радиус полости: 16 – построен открытый тор.

Подберите наглядную плотность каркаса, вводя с командной строки значение переменной ISOLINES. После введения нового значения выполните регенерацию (обновление), введя с командной строки команду «Реген», или укажите кнопку «Регенерация»  в строке состояния. Геометрические параметры построенного тора можно редактировать через панель «Свойства».

Построение тора командой «Вращение»

Рассмотрим построение моделей, приведенных на рис. 11.13б–г. Каждую модель создадим на новом слое. Построения выполняем в экране вида спереди. Результат контролируем в экране аксонометрии.

- ◆ Создайте новый слой и установите его текущим. Слой с предыдущей моделью заморозьте;
- ◆ перейдите в экран вида спереди. Убедитесь, что пиктограмма осей в видовом экране имеет вид , иначе установите в экране ортогональный вид спереди .

Модель тора-веретена (см. рис. 11.13б):

- ◆ Отрезок \ 0,0 \ 0,45 – отрезок оси;
- ◆ Окружность \ Центр: 10.6,24.5 \ Радиус:16 – построена образующая окружность;
- ◆ Обрезка  \ Выберите режущие кромки: укажите отрезок оси \ Выберите объект для обрезки: укажите удаляемую часть окружности – остался сектор дуги a ;
- ◆ постройте отрезок по конечным точкам дуги 1, 2;
- ◆ создайте область из дуги и отрезка (1, 2);
- ◆ Вращение  \ Режим \ Тело \ Выберите объект для вращения: укажите область \ Укажите начальную точку: укажите точку 1 \ Укажите конечную точку: точка 2 \ Укажите угол вращения или: 360 – тор-веретено построен.

Для самопересекающегося тора (см. рис. 11.13в) перейдите на новый слой, заморозьте предыдущий слой и повторите построения, оставив при обрезке большую часть окружности.

Для построения глобоида (см. рис. 11.13г) как солида постройте замкнутый контур из дуги и отрезков по точкам 1, 2, 3, 4. Создайте область и примените команду «Вращение». Для построения глобоида как оболочки выполните вращение только дуги, затем придайте  поверхности толщину 0.001.

Постройте композицию из четырех видовых экранов, в каждом экране настройкой слоев отобразите один из торов. Визуальный стиль «Тонированный с кромками». Настройте плотность каркаса. Присвойте цвет и настройте источники света.

Чертеж тора

На рис. 12.12 показано построение чертежа тора при решении трех задач. Приведена 3D-модель (рис. 12.12а), поясняющая решение. Модель поясняет построение точек пересечения горизонтали h с поверхностью тора. Сечением тора горизонтальной плоскостью, проходящей через h , получены параллели p и p' . Точки $A...D$ пересечения горизонтали h с тором получены как пересечение h с параллелями p, p' .

Модель к рис. 12.12а:

- ◆ Создайте файл на основе шаблона. МСК. Визуальный стиль «Концептуальный»;
- ◆ Тор  \ Центр: 50,35,42 \ Радиус: 16 \ Радиус полости: 7.3 – построен открытый тор;

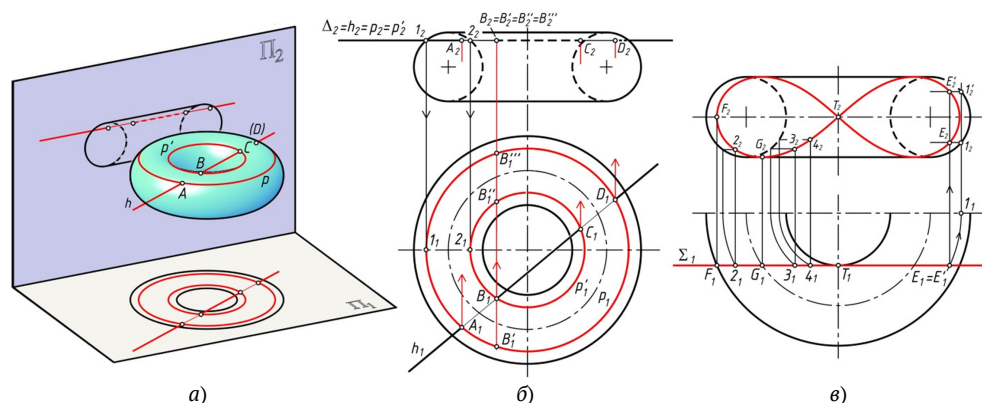


Рис. 12.12. Модель и чертёж тора:
а – модель; б – построение точек; в – лемниската

- ◆ Отрезок \ 78.6,42.4,48 \ 9.4,5.5,48 – построен отрезок горизонтали;
- ◆ Сечение \ Выберите объекты: укажите тор \ XY \ Точка на плоскости: с привязкой «Центр» укажите тор – построены экватор и горловина тора;
- ◆ Сечение \ укажите тор \ XY \ Точка на плоскости: укажите конечную точку отрезка горизонтали – построена область сечения;
- ◆ Разбивка \ укажите область сечения – выделена параллель тора как окружность;
- ◆ поставьте маркеры четырех точек пересечения горизонтали с окружностью. Точки укажите с привязкой «Пересечение»;
- ◆ командой «Конвертирование в 2D» постройте проекции экватора и горловины, параллелей и горизонтали на плоскости Π_1, Π_2 ;
- ◆ придайте наглядность модели, задав цвет и настроив источники света.

Переходим к построению чертежа тора

Задача 1. Найти горизонтальные проекции точек, имеющих фронтальную проекцию в точке B_2 (рис. 12.12б).

Построим горизонтальные проекции параллелей, проходящих через точку B_2 . Для этого через B_2 проводим горизонтальную линию до пересечения с образующей окружностью тора. Через точки $1_2, 2_2$ проводим вертикальные линии связи и находим точки $1_1, 2_1$, по которым строим окружности – параллели p_1, p'_1 . Из заданной точки B_2 проводим вертикальную линию связи и определяем четыре точки пересечения с параллелями – точки B_1, B'_1, B''_1, B'''_1 . Эти точки являются искомыми горизонтальными проекциями точек, имеющих фронтальную проекцию в точке B_2 .

Задача 2. Найти точки пересечения горизонтали h с поверхностью тора (рис. 12.12б).

В соответствии с алгоритмом первой позиционной задачи через горизонталь h задаем горизонтальную секущую плоскость Δ , обозначая ее фронтальную проекцию Δ_2 . Находим пересечение плоскости Δ с поверхностью тора. Это параллели p_1, p'_1 , построение которых рассмотрено в предыдущей задаче. На пересече-

чении горизонтали с параллелями находим четыре точки $A_1...D_1$, являющиеся горизонтальными проекциями искомых точек пересечения горизонтали с тором. По вертикальным линиям связи находим искомые фронтальные проекции $A_2...D_2$ точек пересечения.

Уточняем видимость участков фронтальной проекции горизонтали. Видимые участки проводим сплошной толстой линией. Участки, проходящие в теле тора, проводим сплошной тонкой линией. Участки линии, расположенные вне тора, но невидимые, проводим штриховой линией.

Задача 3. Построить лемнискату Бернулли как фронтальную проекцию сечения тора плоскостью Σ (рис. 12.12в).

Секущая плоскость Σ касается внутренней поверхности тора в точке T и является фронтальной плоскостью уровня. Горизонтальные проекции всех точек искомой линии принадлежат проекции этой плоскости Σ_1 . Назначим горизонтальные проекции точек и по параллелям найдем фронтальные проекции точек.

Например, задав точку E_1 , проводим дугу параллели. Из точки 1_1 проводим вертикальную линию связи. На пересечении этой линии с образующей окружностью находим точки $1_2, 1'_2$, по которым проводим горизонтальные отрезки, являющимися фронтальными проекциями параллелей, на которых расположены точки E . На пересечении этих отрезков с вертикальной линией связи, проведенной из точки E_1 , находим искомые проекции точек E_2, E'_2 .

Повторяем этот алгоритм для точек $F, G, 2, 3, 4$ и получаем их фронтальные проекции для левой нижней части фронтальной проекции искомой линии. Точки F, G, T являются опорными точками лемнискаты. Точки $2, 3, 4$ – промежуточными. Остальные участки линии строим на основе ее симметрии относительно осей тора. Линию получим, соединив точки плавной кривой.

◆ Сохраните модели и чертежи в файле «Тор.dwg».

12.11. 3D-модели сечений тора

◆ Создайте файл на основе шаблона. МСК. Координатные плоскости скройте.

Построение кривых Персея на примере лемнискаты Бернулли:

- ◆ Перейдите в экран вида сверху. Убедитесь, что пиктограмма ПСК имеет вид ;
- ◆ Тор  \ Центр: 0,0 \ Радиус: 16 \ Радиус полости: 7.3 – построен открытый тор;
- ◆ установите в экране визуальный стиль «Концептуальный». Задайте ISO-LINES = 0; выполните регенерацию .
- ◆ Сечение \ укажите тор \ XY \ 0,0 – точка центра тора – построено экваториальное сечение как область;
- ◆ Разбивка  \ укажите область сечения – получены две параллели – окружности экватора и горловины тора;
- ◆ Сечение  \ укажите тор \ ZX \ с привязкой «Квадрант» укажите точку T (см. рис. 11.14е);

- ◆ перейдите в экран вида спереди. Скройте (изолировать \ скрыть) тор. В экране осталось построенное сечение – лемниската как объект-область;
- ◆ сечение через буфер памяти вынесите на Лист.

По приведенному алгоритму постройте остальные кривые Персея, задавая для них положение секущей плоскости на виде сверху согласно рис. 11.14е.

Построение кругов Вилларсо и спираических кривых:

- ◆ В экране вида сверху постройте тор по приведенным выше параметрам (см. рис. 11.14н);
- ◆ перейдите в экран вида спереди. По пиктограмме осей убедитесь, что в экране установлен ортогональный вид спереди , или установите его . Установите визуальный стиль «2D Каркас»;
- ◆ в экране вида сверху через центр тора постройте сечение тора плоскостью ZX МСК – в экране вида спереди показаны две круговые области сечения s и s' (см. рис. 11.14м);
- ◆ Разбивка \ укажите правую круговую область сечения s \ повторно укажите ту же область – из области выделена окружность;
- ◆ наведя курсор, убедитесь, что правая часть сечения стала объектом «Окружность»;
- ◆ Отрезок \ 0,0 или с привязкой «Центр» укажите центр тора \ с привязкой «Касательная» укажите окружность s – построен отрезок OK как половина внутренней касательной m к сечению тора;
- ◆ ПСК 3 точки  \ укажите точку O \ укажите точку K \ Применить – Плоскость ZX заняла положение внутренней касательной плоскости тора;
- ◆ Сечение \ укажите тор \ 3 точки \ 0,0 \ 1,0 \ 0,0,1 – построены круги Вилларсо (см. рис. 11.14н).

Отобразим круги в истинном виде:

- ◆ в экране аксонометрии установите стиль «2D Каркас»;
- ◆ ПСК 3 точки \ укажите точки K, K' пересечения кругов и третью произвольную точку на одном из кругов;
- ◆ План \ Текущая – в экране построен истинный вид кругов;
- ◆ через буфер памяти вынесите сечения на Лист (см. рис. 11.14л);
- ◆ выполните дважды разбивку сечения – линии стали сплайнами;
- ◆ для контроля постройте поверх каждого круга окружность, задав ее тремя точками , указанными на сплайнах с привязкой «Ближайшая». Убедитесь в совпадении окружности и линии сечения.

Для построения других спираических кривых (см. рис. 11.4ж–к) выполните сечение тора плоскостями, расположенными под углом 45° к оси X . В остальном алгоритм тот же, что для кругов Вилларсо.

- ◆ Из сечений, вынесенных на Лист, составьте композиции, как на рис. 11.14.
- ◆ Сохраните построения в файле «Сечения тора.dwg».

Библиографический список

1. Инженерная 3D-компьютерная графика: учебник и практикум для академического бакалавриата / А. Л. Хейфец, А. Н. Логиновский, И. В. Буторина, В. Н. Васильева / под ред. А. Л. Хейфеца. 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Юрайт, 2015. 602 с.
2. Хейфец А. Л. Компьютерная графика для строителей: учебник и практикум для академического бакалавриата / А. Л. Хейфец, В. Н. Васильева, И. В. Буторина / под ред. А. Л. Хейфеца. 2-е изд. перераб. и доп. – М.: Юрайт, 2016. 216 с.
3. Хейфец А. Л. Компьютерно-графическая подготовка элитной группы студентов-строителей в ЮУрГУ // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Строительство и архитектура. 2021. Т. 21. № 4. С. 73–84.
4. Хейфец А. Л. Инженерная 3D-компьютерная графика. Платформа nanoCAD: учебник для академического бакалавриата. 2-е изд., перераб. и доп. – М.: ДМК Пресс, 2024. 302 с.
5. Короткий В. А. Начертательная геометрия: решение задач / В. А. Короткий, Л. И. Хмарова, Е. А. Усманова. Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2016. 139 с.
6. Гаспар Монж. Начертательная геометрия. Изд-во АН СССР. 1947. 291 с.
7. Курдюмов В. И. Курс начертательной геометрии. СПб., 1898.
8. Глоговский В. В. Элементарные конструктивные задачи по начертательной геометрии. Львов: Вища школа; Изд-во при Львов. ун-те, 1981. 152 с.
9. Сенигов Н. П., Гусятникова Т. В. Методика решения задач по начертательной геометрии: учеб. пособие. Челябинск: ЧПИ, 1983. 59 с.
10. Барский Ю. К. Методика решения комплексных задач по начертательной геометрии: учебное пособие / под ред. Г. В. Калмыкова. Челябинск: ЧГТУ, 1993. 88 с.
11. Барский Ю. К., Краснов В. А., Шепелев Г. В. 30 олимпиадных задач по начертательной геометрии: учеб. пособие. Челябинск: ЧГТУ, 1996. 58 с.

Заключение

от ООО «Нанософт разработка»

В представленном учебном издании изложено содержание лекционно-практического курса, разработанного как современная альтернатива традиционному курсу начертательной геометрии. Основная идея курса заключается в переходе от двухмерных проекционных построений к трехмерному компьютерному моделированию. Инструментальной базой для реализации данного подхода выбрана отечественная Платформа nanoCAD, что соответствует актуальным задачам достижения технологического лидерства России.

В результате выполненной работы и обобщения многолетнего педагогического опыта автора получены следующие основные результаты:

- 1) разработана целостная методика преподавания теоретических основ геометрического моделирования, базирующаяся на применении технологий 3D-моделирования и средств отечественной системы автоматизированного проектирования;
- 2) предложена и реализована двухчастная структура изложения материала (лекционная часть и практическое приложение), позволяющая последовательно и полноценно осваивать фундаментальные понятия геометрического моделирования;
- 3) обеспечена преемственность классического геометрического образования: читатель знакомится как с традиционными методами начертательной геометрии, необходимыми для понимания инженерного языка, так и с современными 3D-методами моделирования;
- 4) разработаны алгоритмы построения 3D-моделей и проекционных чертежей, апробированные в ходе проведения лекционных и практических занятий со студентами инженерных и архитектурно-строительных специальностей.

Содержание учебника полностью соответствует поставленным задачам: изучение теоретических основ 3D-компьютерного геометрического моделирования применительно к инженерной деятельности, а также освоение современных методов моделирования на базе Платформы nanoCAD. Представленный материал является, по мнению разработчика, необходимым минимумом для дальнейшей профессиональной деятельности обучающихся и освоения последующих дисциплин инженерно-технического и архитектурно-строительного направлений.

Благодарим Хейфеца Александра Львовича за профессионализм и вклад в развитие инженерного образования. Также выражаем особую благодарность Камалетдинову Тимуру Альбертовичу за техническую экспертизу в части применения Платформы nanoCAD и успешную адаптацию материалов книги для современного читателя.

Просим уделить пару минут вашего времени и оставить отзыв об учебнике.

<https://clck.ru/3SEHHS>



Александр Львович Хейфец

Теоретические основы инженерной 3D-компьютерной графики

Учебник для инженерных и архитектурных специальностей вузов

Главный редактор *Яценков В. С.*
dmkpress@gmail.com

Технический консультант *Камалетдинов Т. А.*

Корректор *Абросимова Л. А.*

Верстка *Чаннова А. А.*

Дизайн обложки *Геращенко М. В.*

Формат 70×100 1/16.

Гарнитура PT Serif. Печать офсетная.

Усл. печ. л. 29,9. Тираж 1000 экз.

Веб-сайт издательства: **www.dmkpress.com**



Хейфец Александр Львович

Профессор, кандидат технических наук. Автор учебника «Инженерная 3D-компьютерная графика. Платформа nanoCAD» и более 200 научных статей по теоретическим основам компьютерного геометрического моделирования и инженерной трехмерной компьютерной графики.

Теоретические основы инженерной 3D-компьютерной графики. Платформа nanoCAD

В учебнике приведено содержание нового курса, являющегося альтернативой курсу начертательной геометрии. Изложены теоретические основы инженерной 3D-компьютерной графики и геометрического моделирования на базе отечественной Платформы nanoCAD. Материал курса раскрывается с позиций современных 3D-методов компьютерного моделирования.

- Создание 3D-моделей точек, прямых, плоскостей и геометрических тел.
- Исследование и анализ свойств геометрических тел методами 3D-моделирования.
- 3D-алгоритмы решения позиционных, метрических и комплексных задач геометрического моделирования.
- Сравнительная оценка по наглядности, точности и эффективности решений, полученных традиционными методами начертательной геометрии и современными методами 3D-моделирования.
- Автоматическое построение чертежей позиционных, метрических и комплексных задач по 3D-моделям.

Учебник рекомендуется студентам инженерных и архитектурно-строительных направлений, изучающим начертательную геометрию, инженерную и компьютерную графику.



Учебники по работе
в nanoCAD
в электронном
формате



ISBN 978-5-93700-460-4



9 785937 004604 >